Journal of Theory & Practice in Curriculum
Vol.21 (11); 2023, 281-320

دو فصلنامهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی
سال یازدهم، شمارهٔ ۲۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، ۳۲۰-۲۸۱

چالش‌های دانش‌آموزان در ساخت اثبات‌های هندسی[۱]

Students' Challenges in Constructing Geometric Proofs

F. Ahmadpour

Abstract: Geometry is for a long time regarded as one of the main area for learning proof; while students face many difficulties in learning geometric proofs. It even happens very often that students by drawing a geometric figure, no longer see the need to prove the properties of that class of geometric objects. This study has been done by the aim of describing middle school students' performance and perceptions during understanding and doing geometric proof for gaining a more detailed cognition of gradual processes and complexities in the learning geometric proof. The research has been conducted by phenomenography method and analyzing task-based interviews on 53 middle school students. This report describes students' performance and their challenges during constructing a geometric proof in more detail.

Keywords: Geometric proofs, Generalisation and Abstraction, Formalisation, Middle School, Phenomenography.

فاطمه احمدپور[۲]

چکیده: هندسه از دیرباز به عنوان یکی از جایگاه‌های اصلی برای یادگیری اثبات مطرح بوده است، در حالی که دانش‌آموزان مشکلات فراوانی در یادگیری اثبات‌های هندسی دارند. حتی بسیار اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان با ترسیم یک شکل هندسی، دیگر نیازی نمی‌بینند که ویژگی‌های مربوط به آن رده از اشیای هندسی را اثبات کنند. پژوهش حاضر به هدف توصیف عملکرد و برداشت‌های دانش‌آموزان متوسطه اول در حین درک و ساخت اثبات‌هایِ هندسی، انجام شده است تا شناختِ عمیق‌تری از فرایندهای تدریجی و پیچیدگی‌های یادگیری اثبات‌های هندسی به دست آید. این پژوهش به شیوه پدیدارنگاری و با تحلیل مصاحبه‌های فعالیت‌محور از ۵۳ دانش‌آموز متوسطه اول انجام شد. گزارش حاضر تصویر روشن‌تری از عملکرد دانش‌آموزان و چالش‌های آنها را در حین ساخت یک اثبات هندسی ارائه می‌دهد.

واژگان کلیدی: اثبات‌های هندسی، تعمیم و تجرید، صوری‌سازی، دوره متوسطه اول، پدیدارنگاری.

۱ . تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۲۵، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰

۲ . استادیار گروه ریاضی، دانشکده سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران رایانامه :
f.ahmadpour@pgu.ac.ir - f.ahmadpour.86@gmail.com

مقدمه

محوریت اثبات در ریاضی‌ورزیدن، محققان بسیاری را بر آن داشته تا بر اهمیت اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای تاکید نمایند و پیشنهاد کنند اثبات از سال‌های ابتدایی، در تجربیات ریاضی دانش‌آموزان گنجانده شود (استایلینادز[۱]، ۲۰۰۷). به گفته وی، یکی از مشکلات مهمِ گزارش شده در ادبیات پژوهشی اثبات، گذار ناگهانی و پرشتاب دانش‌آموزان از ریاضیات دوره ابتدایی به متوسطه است. قبل از این نیز بال، هویلز، یانکه و موشوویتز-هادر[۲] (۲۰۰۲) به این مشکل پرداخته و از آن به‌عنوان «نارسایی شایع برنامه درسی دوره ابتدائی» یاد نموده و دلیل آن را چنین توضیح دادند: «تمرکز برنامه درسی ریاضی دوره ابتدائی در بسیاری از کشورها بر مفاهیم حساب، انجام محاسبات و الگوریتم‌ها است، در حالی که وقتی دانش‌آموزان وارد دوره متوسطه می‌شوند، به یکباره نیازمند فهمیدن و نوشتن اثبات، به خصوص در مبحث هندسه هستند» (صص. ۹۰۷-۹۰۸). به عقیده استایلینادز (۲۰۰۷)، آشنایی اندک و سریع دانش‌آموزان با اثبات، توجیهی بر مشکلات فراوانی است که دانش‌آموزان دبیرستانی، در مواجهه با اثبات دارند.

در ایران نیز بسیاری از دانش‌آموزان دوره متوسطه، با درک فرایندهای اثبات و استدلال و ساخت اثبات‌های هندسی مشکل دارند (باقری، ۱۳۸۸؛ ریحانی، حمیدی و کلاهدوز، ۱۳۹۱) و به ندرت به سطح استنتاجی در سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی می‌رسند (یافتیان و صفابخش، ۱۳۹۹). با توجه به این مسئله و همچنین تجربهٔ جدیدی که دانش‌آموزان در پایه هفتم در اولین مواجهه با اثبات‌های سادهٔ جبری در نظام آموزشی رسمی دارند، توصیف عملکرد و برداشت‌های دانش‌آموزانِ متوسطه اول حین

[۱] Stylianides

[۲] Ball, Hoyles, Jahnke and Movshovitz-Hadar

درک و ساختِ اثبات‌های هندسی حائز اهمیت است. احمدپور، ریید[1] و فدایی (۲۰۱۹) در پژوهش خود، مسیرهای متفاوت ادراک در فرایند خواندن اثبات را در یک مبحث نظریه اعداد برای دانش‌آموزان هفتم و هشتم شرح دادند. از آنجا که هندسه از دیرباز به عنوان یکی از جایگاه‌های اصلی برای یادگیری اثبات مطرح بوده و با توجه به تفاوت اثبات‌های هندسی با دیگر اثبات‌های ریاضی و فرصت و چالشی که تجسم اشیای هندسی در دانش‌آموزان به وجود می‌آورد، پژوهشی با تمرکز بر ساخت اثبات‌های هندسی توسط دانش‌آموزان دوره متوسطه اول، طراحی و اجرا شد. در این مقاله، برداشت‌های متفاوتی که دانش‌آموزان هنگام انجام یک اثبات هندسی داشتند، به تصویر کشیده شده‌است تا چالش‌های دانش‌آموزان در ساخت یک اثبات هندسی، نمایان شود.

مرور پیشینه

در شکل‌گیری ساختار استنتاجی یک اثبات، دو فرایند تعمیم و تجرید دخیل هستند؛ سپس فرایند صوری‌سازی، برای آن ساختار مجرد و شخصی، صورتی فراهم می‌کند که به‌توان آن را با دیگران به اشتراک گذاشت. در بخش حاضر مرور کوتاهی بر این مفاهیم اساسی می‌شود.

- ساختار و صورت اثبات

درک یک اثبات چیزی بیش از ادراک تک تک سطرهای اثبات است و باید کل ساختار استنتاجی اثبات فهمیده شود (لرون[2]، ۱۹۸۳). میازاکی، فوجیتا و جونز[3] (۲۰۱۷) ساختار اثبات‌هایِ استنتاجی را این گونه تعریف می‌کنند:

> شبکه‌ای مرتبط از استدلال‌های استنتاجی است که گزاره‌های منفرد و عمومی را ترکیب می‌کند. دیدن یک اثبات به عنوان یک شیء[1] موجب درکِ ارزشِ

[1] Reid

[2] Leron

[3] Miyazaki, Fujita & Jones

اجزای اثبات و روابط مابین‌شان می‌شود، چگونگیِ تشکیل اثبات از این اجـزاء و چرایی نیازِ یک اثبات به ساختارش را [نیز] نشان می‌دهد. (ص. ۲۲۶)

دو اثبات از لحاظ مفهومی هم‌ارز هستند، دقیقا زمانی که ساختار یکسانی دارند. ایـن در حالی است که استفاده از بازنمایی‌های متفاوت برای دو اثبات با سـاختاری یکسـان، موجب می‌شود صورتِ کاملا متفاوتی داشته باشند.

ممکن است کسی ایدهٔ یک اثبات را بداند، ساختار آن را بفهمد، ولی نتواند آن را بـه صورت قابل قبول برای جامعه مورد نظر ارائه دهد. این امکان هم وجود دارد که کسـی اثبات‌های صوری قابل قبول تولید کند، بدون آنکه درکـی از سـاختار آن داشـته باشـد. بنابراین برای شناسایی فرایندهایی که طی آنها یک اثبات درک مـی‌شـود، توجـه بـه دو جنبهٔ اثبات ضروری است: الـف) درک سـاختار اسـتنتاجی زیربنـایی یـک اثبـات، ب) دسترسی به صورت اثبات. در هنگام ادراک اثبات، این دو تا حدی از هم مسـتقل درک می‌شوند ولی بر هم تاثیر دارد (احمـدپور و همکـاران، ۲۰۱۹). تحقیقـات انجـام شـده نشان می‌دهد دانش‌آموزان به ویژگی‌های ظاهری اثبات بسیار توجه دارند، به طوری که می‌تواند آنها را به قبول اثبات‌های غیرمعتبر سوق دهد (مارتین و هارل، ۱۹۸۹؛ هیلـی و هویلز، ۲۰۰۰؛ ناث، ۲۰۰۲) [۲].

- تعمیم و تجرید: گذار از خاص به عام

ساختار یک اثبات، شی‌ای مجرد است و فرایند یافتن آن مانند فرایند فهمِ یک مفهوم، از طریق *تعمیم* و *تجرید* انجام می‌گردد. بنابراین در این‌جا، ادبیات مربوط بـه تعمـیم و تجرید بیان می‌شود. تعمیم و تجرید، دو جزء مهم در فرایند اثبـات و البتـه بسـیاری از

[۱] «دیدن یک موجود ریاضی [در اینجا اثبات] به عنوان یک شیء به این معناست که قادریم به آن اشاره کنیم، مثل اینکه یک چیز واقعی باشد –یک ساختار ایستا که جایی در مکان و زمان وجود دارد. همچنین بدین معناست که قادریم با یک نگاه این ایده را تشخیص داده، با آن به عنوان یک کل، کار کنیم، بدون آنکه به جزئیات بپردازیم.» (اسفارد، ۱۹۹۱)

[۲] Martin & Harel, 1989; Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002

حوزه‌های دیگر ریاضی هستند. اما استفاده از اصطلاحات «تعمیم» و «تجرید» در حوزه‌های مختلف آموزش ریاضی یکسان نیست. هارل و تال[۱] (۱۹۹۱) «تعمیم» را برای اطلاق به «فرایند به‌کارگیریِ یک استدلال در زمینه‌ای وسیع‌تر» استفاده کردند و فرایند «تجرید» را این‌گونه تشریح کردند: «وقتی شخص بر روی ویژگی‌های به‌خصوصی از یک شیء معین تمرکز کرده و سپس این ویژگی‌ها را جدای از منشاء اصلی (شیءِ اولیه) مد نظر قرار می‌دهد» (ص. ۳۹). میسن[۲] (۱۹۸۹) نیز در توصیفِ «تجرید»، به جداسازیِ ویژگی‌های تعریف‌کنندۀ یک رده اشاره کرده و می‌گوید:

> هنگام تجرید، تغییر توجهِ ظریفی رخ می‌دهد. توجه، از یک حالتِ تعمیم یافته به یک شیء یا ویژگی معطوف می‌شود ... در آن تغییرِ توجهِ بسیار ظریف، صورت و قالب یک چیز محسوس، دور ریخته می‌شود. (ص. ۲)

در اینجا، اصطلاح «تعمیم» برای بازشناسیِ یک ویژگی مشترک بین همۀ اشیای یک رده به‌کار می‌رود. همان‌طور که بعد از این، مورد بحث قرار خواهد گرفت، به‌کار بردن فرایند تعمیم در اثبات کردن، به معنای شناسایی رویه‌ای است که به‌توان آن را روی هر عضوی از یک رده انجام داد. همچنین تجرید، به معنای ساختِ ایده‌ای است که مشخصۀ یک رده باشد. در اثبات کردن، تجرید، ساختِ ساختاری است که به ایدۀ زیربناییِ یک رویه کلی «جسمیت[۳]» (اسفارد[۴]، ۱۹۹۱) می‌دهد. جنبۀ مشترک هر دو فرایند تعمیم و تجرید، تاکید بر تعدادی از ویژگی‌ها و در نتیجه نادیده گرفتن بقیه آنهاست. در این صورت هر چند تعمیم و تجرید دو فرایند با ماهیت و کارکرد متفاوت هستند، ولی وجود این جنبه مشترک موجب می‌شود که در زمان مشاهدۀ عملکرد دانش‌آموزان تمایز این دو از یکدیگر مشکل باشد.

---

[۱] Tall

[۲] Mason

[۳] Reification

[۴] Sfard

- انواع بازنمایی و صوری‌سازی

در صورتِ یک اثبات می‌توان از بازنمایی‌های مختلف استفاده نمود. نام‌ها، نمادها، نمودارها و دیگر بازنمایی‌ها در فرایند شکل‌گیری ساختار یک اثبات نقش دارد. بنابراین ادبیات پژوهشی مرتبط مرور خواهد شد.

استفاده از بازنمایی‌های نمادی، در طی برنامه‌درسی ریاضی دانش‌آموزان دوره متوسطه اول به مرور پررنگ‌تر و پراهمیت‌تر می‌شود. وقتی ایده‌های ریاضی به صورت نمادی، بازنمایی می‌شوند، «برای فرایندهای مکانیکی سازگار و تعدیل می‌گردند» (دیویس و هرش[۱]، ۱۹۸۱، ص. ۱۳۶). به عبارت دیگر این امکان فراهم می‌شود که به جای مجردات، با نمادهای نشان‌دهندهٔ آنها کار شود. بیشترین قدرت جبر، از همین *صوری‌سازی* است. البته صوری‌سازی خیلی پیش‌تر از این‌ها و در سال‌های ابتدایی مدرسه به‌کار گرفته می‌شود؛ همان زمانی که به جای «پنجِ» انتزاعی و مجرد، روی نماد «۵»، عملیات انجام می‌گیرد. به‌علاوه صوری‌سازی، *به* یک شیءِ شخصی (که یک مفهوم مجرد در ذهن فرد است) صورتی می‌دهد که می‌توان آن را با دیگران به اشتراک گذاشت.

در پنج بازنمایی که کلمنت[۲] (۲۰۰۴، بر اساس کارهای لش، پست و بیر[۳]، ۱۹۸۷؛ شکل ۱ را ببینید) تصویر کرده است، نمادهای نوشتاری اغلب به مفاهیم مجرد و انتزاعی مربوط است و موقعیت‌ها، دست‌ورزها[۴] و تصاویر با مثال‌های عینی و فهم

---

[۱] Davis & Hersh

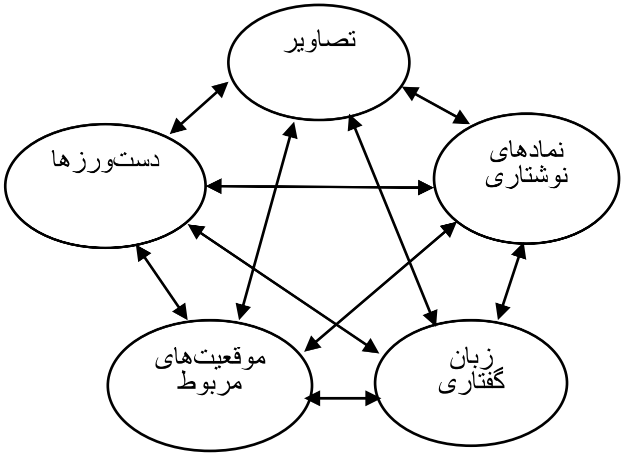
[۲] Clement

[۳] Lesh, Post & Behr

[۴] Manipulatives

دست‌ورزها مصنوعاتی هستند که دانش‌آموزان به منظور جست‌وجو، به دست آوردن یا بررسی مفاهیم ریاضی و انجام فعالیت‌های حل مسئله بر اساس شواهد ادراکی به‌کار می‌گیرند (بارتولینی و مارتینیونه، ۲۰۱۴). چرتکه و چینه‌ها [بلوک‌های دینز (Dienes blocks)] مثال‌هایی از دست‌ورزهای معروف هستند.

تجربی ارتباط دارد. البته این امکان وجود دارد که افراد مفاهیم مجرد خود را در قالب تصاویر، دست‌ورزها و موقعیت‌های مرتبط نیز نشان دهند. اسفارد (۱۹۹۱) نیز اذعان می‌کند «اگرچه ویژگی ساختاری بیشتر در نگاه فرد است تا در خود نمادها، اما به نظر می‌رسد بعضی از بازنمایی‌ها نسبت به سایرین، برای تعبیر ساختاری مستعدترند» (ص. ۵).



شکل ۱: پنج بازنماییِ تصویرشده توسط کلمنت (۲۰۰٤)

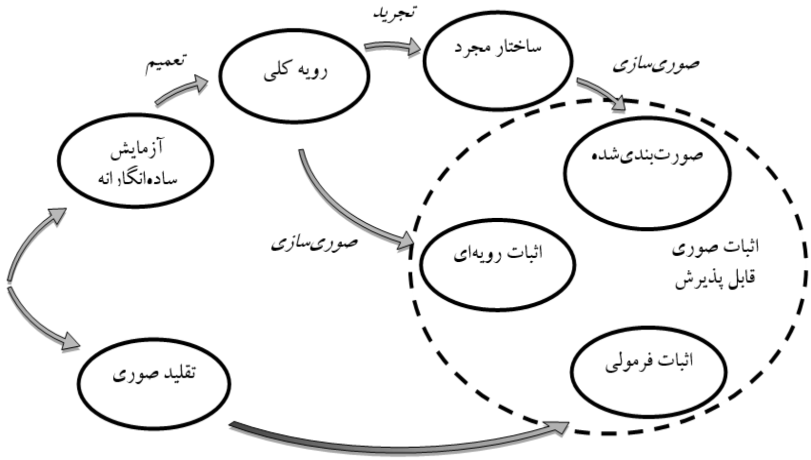
چارچوب نظری

برای تحلیل درک و فهم اثبات، پژوهش‌های تاثیرگذاری انجام شده است: طبقه‌بندی‌هایی مانند «طرحواره‌های اثبات[1]» از هارل و سودر (۱۹۹۸)، طبقه‌بندی مجیبا–راموس، فولر، وبر، رودز و سمکف[2] (۲۰۱۲) در ارزیابی‌های درک و فهم اثبات. این مطالعات درمورد ادراک دانش‌آموزان از اثبات بیشتر به طبقه‌بندی و تمایز میان انواع ادراک محدود می‌شود. مطالعه احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) مدلی ارائه می‌دهد که علاوه بر ارائه مراحل ادراک در فرایند خواندن و ساخت اثبات، به مسیرهای مختلف در فرایند ادراک اثبات و نحوه رشد ادراک و ماهیت گذار بین سطوح اثبات نیز می‌پردازد و

[1] Proof Schemes

[2] Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff

نسبت به گذشته تصویر روشن‌تری از این فرایند و زبان غنی‌تری برای توصیف آن فراهم می‌کند. این مدل (شکل ۲)، شبکه‌ای مرتبط از سطوح و حالت‌های مختلف ادراک اثبات است و از این جهت که فراتر از فهرست‌بندی انواع ادراک پیش رفته و رشد فهم و درک را در یک فرایند یادگیری به تصویر می‌کشد، تا حدی شبیه به مدل پیِیری و کی‌یِرن[1] (۱۹۸۹) و هرشوویچ و بِرگِرُن[2] (۱۹۸۸) عمل می‌کند.



شکل ۲: مدل درک دانش‌آموزان در فرایند خواندن و انجام اثبات (احمدپور و همکاران، ۲۰۱۹)

- مسیر ساختار

انتهای مسیر ساختار به یک «اثبات صورت‌بندی شده» می‌رسد. فرایند درک و فهم یک اثبات صورت‌بندی شده، مسیری است که می‌تواند شامل چهار مرحله باشد. این چهار مرحله به وسیله سه فرایند مشخص و جزئی به هم مرتبط می‌شوند. از طریق تعمیم، «آزمایش ساده‌انگارانه» به یک «رویه کلی» می‌رسد. تجریدِ یک «رویه کلی»

[1] Pirie & Kieren

[2] Herscovics & Bergeron

منجر به داشتن یک «ساختار مجرد» می‌شود. در نهایت، صوری‌سازیِ «ساختار مجرد»، یک «اثبات صورت‌بندی شده» فراهم می‌کند (شکل ۲ را ببینید).

«آزمایش ساده‌انگارانه» شامل بررسی مثال‌های مشخص و خاص برای آزمودنِ تجربی یک ادعا، به‌دست‌آوردن فهم بهتری نسبت به آن و تشخیص ویژگی‌ها و مشخصه‌های مشترک بین مثال‌هاست. با تکیه و تاکید روی برخی از ویژگی‌های مثال‌ها و در نتیجهٔ کنار گذاشتن بقیه ویژگی‌ها، یک رویه شناسایی می‌شود که به ازای تمام اعضای یک رده بزرگتر از اشیاء برقرار است. این رویه، «رویه کلی» نامیده می‌شود. سپس ایدهٔ زیربناییِ آن رویه تشخیص داده می‌شود که ساختاری را برای اثبات فراهم می‌کند. در نهایت ساختار، صوری شده و به عنوان یک «اثبات صورت‌بندی شده» بیان می‌شود.

- **مسیر صورت**

بسیار دیده شده است که پاسخ‌های نوشتاری دانش‌آموزان به مسائل ریاضی، از لحاظ نحوی به یکدیگر شبیه هستند، اما معناداری آنها برای دانش‌آموزان متفاوت است. برخی از دانش‌آموزان با تقلید از اصطلاحات، عبارات و نمادها، فقط بر صورت تمرکز می‌کنند، درنتیجه پاسخ‌های نوشتاری آنها *توخالی* است و برایشان معنادار نیست. مسیر صورت از «تقلید صوری» شروع و با افزایش مهارت تکنیکی به «اثبات فرمولی» می‌رسد (شکل ۲ را ملاحظه کنید).

- **مسیر رویه**

این مسیر فرعی مانند مسیر ساختار آغاز می‌شود، تعمیم صورت می‌گیرد ولی بدون اینکه تجرید رخ دهد، فرد رویه‌ای که در دست دارد، صوری می‌کند (شکل ۲ را ببینید). در این حالت به دلیل صوری‌سازی زودهنگام، درک مطلوب حاصل نمی‌شود. محصول این فرایند، اثبات رویه‌ای است. ترجمهٔ رویه به صورت نمادین به درک و فهم دانش‌آموزان عمق نمی‌بخشد. بلکه آنها ایده‌هایشان را در یک زبان مختصرتر ارائه می‌دهند. در حالی که رویهٔ پنهان شده در آن، هنوز هم یک رویهٔ کلی برای انجام

عملیات روی اشیای ریاضی است. از نظر بالاشف[۱] (۱۹۸۸) چنین اثبات‌هایی هنوز *عملیاتی*[۲] هستند تا *مفهومی*[۳]. «اثبات‌های عملیاتی آنهایی هستند که با استفاده از عمل واقعی یا نمایش انجام می‌شوند و در مقابل، اثبات‌های مفهومی آنهایی هستند که درگیر انجام عملی نمی‌شود، بلکه بر اساس صورت‌بندی ویژگی‌ها و روابط بین آنها در سوال ساخته می‌شوند» (بالاشف، ۱۹۹۸، ص. ۲۱۷).

- غیرخطی بودن مدل

پیکان‌هایی که در مدل (شکل ۲) کشیده شده‌اند، مسیرها را از لحاظ نظری نشان می‌دهند. دانش‌آموزان می‌توانند در مسیرهای مختلف مدل حرکت کنند. در حین تغییر درک، آنها گاهی به مراحل عقب باز می‌گردند و گاهی از مسیری به مسیر دیگر می‌روند. «فهمیدن دارای سطوح مختلف اما غیر خطی است. [فهمیدن] یک پدیده بازگشتی است و بازگشت زمانی اتفاق می‌افتد که تفکر در بین سطوح خبرگی حرکت می‌کند» (پیِیری و کی‌یِرن، ۱۹۸۹، ص. ۸). به‌علاوه امکان دارد از این مسیر به مسیر دیگری رفته و برگردد، بنابراین فهمیدن هم بر اساس صورت و هم بر اساس ساختار، شکل می‌گیرد. در همین راستا، اسفارد (۱۹۹۱) بیان داشت:

> به نظر می‌رسد در فرایند یادگیری، گاهی درک و فهم دانش‌آموز –این احساس مهارت و تسلطی که به همراه توانایی «دیدن» ساختارهای مجرد می‌آید– ناگزیر در پشت زبردستی تکنیکی قرار می‌گیرد. این بدین معنا است که در برخی از موارد، فراگیر باید [سختی] انجام مقدار مشخصی تمرین مکانیکی را تحمل کند که همراه با شک به معنا و احساس ناکافی بودن فهم (صرفاً ابزاری) است. حتی ریاضیدان حرفه‌ای نمی‌تواند از این سرنوشت فرار کند و

---

[۱] Balacheff

[۲] Pragmatic

[۳] Conceptual

اغلب در مورد لزوم تلاش سخت، برای معنای ایده‌های ظاهراً ساده شکایت می‌کند. (ص. ۳۲)

روش‌شناسی

این پژوهش به هدف توصیف و تحلیل تجربیات دانش‌آموزان متوسطه اول در ادراک و ساخت یک اثبات هندسی طراحی و بنابراین به شیوه پدیدارنگاری انجام شد. این روش از سنت‌های پژوهش کیفی است و «اشکال مختلف تفکر را مشخص و نظام‌مند می‌کند» (مارتون[1]، ۱۹۸۱، ص. ۱۸۰). پدیدارنگاری را می‌توان برای تحقیق درمورد تفکر افراد (برداشت‌های آنها)، تغییرات در رشد تفکرشان، از جمله تغییراتی که در نتیجه آموزش رخ می‌دهد، مورد استفاده قرار داد (گال، بورگ و گال، ۱۹۹۶، ترجمه نصر و همکاران، ۱۳۸۹). در این روش پژوهشی «تصورات و شیوه‌های ادراک به‌عنوان ویژگی‌های فردی دیده نمی‌شوند. بلکه تصورات [شرکت‌کنندگان در پژوهش] نسبت به واقعیت به عنوان طبقه‌های توصیفی در نظر گرفته می‌شوند تا برای تسهیل درک موارد مشخص از عملکرد انسانی مورد استفاده قرار گیرند.» (مارتون، ۱۹۸۱، ص. ۱۷۷).

شرکت‌کنندگان این تحقیق، شامل ۵۳ دانش‌آموز دوره متوسطه اول (دختر و پسر) بود. از آنجا که هدف احصای تفاوت در برداشت‌ها بود، لذا در انتخاب شرکت‌کنندگان علاوه بر اینکه از قاعده تفاوت حداکثر استفاده شد (به استناد فیلیک، ۱۹۹۸، ترجمه جلیلی، ۱۳۸۸)، نمونه‌گیری تا رسیدن به موردی که پس از آن اطلاعات جدیدی به دست نیامد، ادامه یافت (به استناد گال و همکاران، ۱۹۹۶، ترجمه نصر و همکاران، ۱۳۸۹).

ابزار گردآوری اطلاعات، شامل مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری با دانش‌آموزان بود. مصاحبه‌ها حول مسئله هندسی زیر انجام شد:

[1] Marton

در هر مثلث، اگر پاره خطی را از یک رأس به وسط ضلع مقابل وصل کنید، مساحت در دو مثلث به دست آمده برابر است. می‌توانید درستی آن را نشان دهید؟

مسئله خارج از کتاب درسی ولی متناسب با دانسته‌های دانش‌آموزان متوسطه اول است، هرچند که برای شرکت‌کنندگان در پژوهشی ساده و سرراست نبود.

دانش‌آموزان به صورت انفرادی به حل مسئله مطرح شده توسط مصاحبه‌کننده پرداختند. زمان حل فعالیت‌ها بنا به خواستهٔ هر دانش‌آموز متغیر بود. در هر زمانی که از کار متوقف می‌شدند، روش حل و دلایل پاسخ‌های خود را شرح می‌دادند. مصاحبه‌کننده علاوه بر پرسیدن سوالات محرکِ[۱] از پیش تعیین شده، بنابر شرایط خاصِ هر مصاحبه، سوالاتی را مطرح می‌کرد.

روند مصاحبه ضبط صوتی شده و یادداشت‌های میدانی از جزئیات رفتار شرکت‌کنندگان در تحقیق تهیه گردید. هر چه تعداد مصاحبه‌های انجام شده بیشتر می‌شد، تعداد پاسخ‌های تکراری در میان جواب‌های دریافتی از دانش‌آموزان بیشتر می‌شد، تا نهایتا در مصاحبه‌های پایانی، پاسخ جدیدی دیده نشد. از آنجا که یافته‌های حاصل از مصاحبه با شرکت‌کنندگان پایانی، موارد قبلی را تکرار نمود، به استناد گال و همکاران (۱۹۹۶، ترجمه نصر و همکاران، ۱۳۸۹) این اتفاق، اعتبار یافته‌های قبلی را افزایش داد.

برای تحلیل مصاحبه‌های ضبط شده، ابتدا با تمام جزئیات پیاده‌سازی شدند. در ادامه، پیاده‌سازی‌ها با پاسخ‌های مکتوب دانش‌آموزان با تصویر پاسخ‌های مکتوب، تلفیق شدند. سپس داده‌های حاصل، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند؛ نتایج تحلیل شده در طبقه‌بندی‌های توصیفی قرار گرفتند. این شیوه طبق رویه کدگذاری کیفی و بر اساس مدل احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) انجام شد تا برداشت‌ها، تجارب و عملکرد دانش‌آموزان در حین درک و ساخت اثبات توصیف و تحلیل شوند.

[۱] Trigger

فرایند تحلیل، تکراری و چند باره بود؛ داده‌ها به روش تحلیل محتوا (فیلیک، ۱۹۹۸، ترجمه جلیلی، ۱۳۸۸) خلاصه و ساختاربندی شد. داده‌ها بر اساس تکنیک تلخیص تحلیل محتوا، بازگویی شد؛ سپس گزاره‌هایی که ارتباط چندانی به هدف تحقیق نداشتند یا معنای مشابهی با سایر عبارت‌ها داشتند، کنار گذاشته می‌شدند. به این ترتیب گزاره‌های مربوط، دسته‌بندی و خلاصه شدند. در مرحله بعد، بر اساس چارچوب نظری بحث، داده‌های حاصل دوباره واکاوی، با دقت بیشتری توصیف و نهایتا ساختاربندی شدند. همچنین در ارجاع به شرکت‌کنندگان، از اسم‌های مستعار استفاده شد تا محرمیت آنان، حفظ شود.

نتایج

در این بخش، توصیف مسیرهای سه‌گانه[1] عملکرد و نحوه تفکر شرکت‌کنندگان در تحقیق و مراحل آن‌ها، ارائه می‌شود. بر اساس داده‌های حاصل از مصاحبه و ادبیات پژوهشی مربوط، هر مرحله در یک موقعیت هندسی توصیف و با مثالی تشریح می‌شود.

مسیر ساختار

- *آزمایش ساده‌انگارانه*[2]

در حین انجام فعالیت‌های هندسی، وقتی دانش‌آموزی با مدل‌های اشیای هندسی دست‌ورزی می‌کند و روابط بین اشکال و خصوصیات آنها را مشاهده و بررسی می‌کند، ممکن است فکر کند «با دیدن می‌توان باور کرد» یا «حدس زدن همان تصدیق کردن است» و یا «با ترسیم شکل، ادعا اثبات می‌شود»، در این صورت حاصل تلاش او ناکافی و نامعتبر است. دانش‌آموزانی که مسئله‌حل‌کن‌های مبتدی هستند برای سنجش اعتبار یک ادعا، چند مثال را بررسی کرده و این روش را برای تصدیقِ درستی یک گزاره،

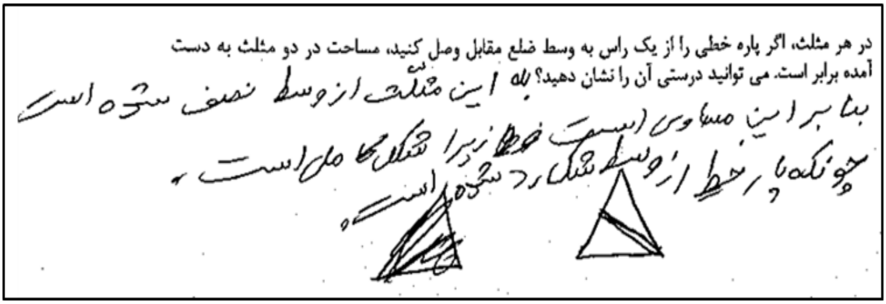
---

[1] مسیرهای ساختار، صورت و رویه (طبق مدل احمدپور و همکاران، ۲۰۱۹)

[2] Naïve Experience

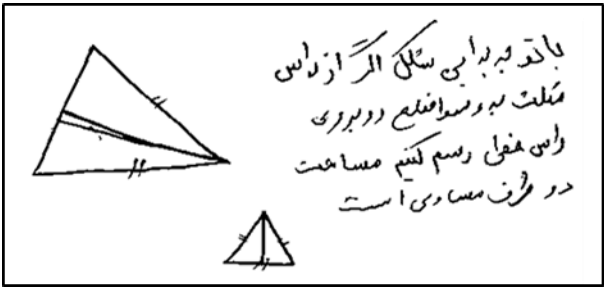
متقاعدکننده و کافی می‌دانند. در این حالت فرد، به تعبیر بالاشف (۱۹۸۸) «تجربه‌گرایی *ساده‌انگارانه*[1]» دارد؛ «ابزاری بسیار ابتدایی (و همان‌طور که می‌دانیم ناکافی) برای اثبات و یکی از اولین صورت‌های فرایند تعمیم است» (ص. ۲۱۸).

علی دانش‌آموز پایه هفتم در پاسخ به سوال تحقیق، با رسم شکلی نادقیق و اکتفا به حس بصری، درستی گزاره مطرح شده در سوال را باور کرد (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳: پاسخ علی دانش‌آموز پایه هفتم

مهرداد نیز دانش‌آموز پایه هفتم در پاسخ به سوال تحقیق، با رسم شکل در حالت‌های خاص مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع و اکتفا به حس بصری، درستی گزاره مطرح شده در سوال را بررسی نمود (شکل ٤ را ببینید).



شکل ٤: پاسخ مهرداد دانش‌آموز پایه هفتم

مهرداد *در هر مثلث اگر پاره‌خطی از رأسش به وسط ضلع مقابلش رسم کنیم، مساحت در دو طرف مساوی است. اگر شکل بکشیم معلوم می‌شه. من دو تا*

---

[1] Naïve Empiricism

شکل کشیدم [شکل ٤] [1]؛ این متساوی‌الساقینه، کشیدم دو تاش نصف شده. اینم متوازی‌الاضلاعه، کشیدم اینم بازم دو تاش نصف شده.

مصاحبه‌کننده *چی نصف شده؟*

مهرداد *مساحتش.*

مصاحبه‌کننده *از کجا متوجه شدی مساحتش نصف شده؟*

مهرداد *از رو شکلش. شکلش که کشیدم، رسم کردم. قبلا هم اینو امتحان کرده بودم.*

مصاحبه‌کننده *در مثلث متساوی الاضلاعی که کشیدی، از کجا می‌دونی مساحت این دو تا [مثلث] با هم برابره [با اشاره به دو مثلث به دست آمده در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ٤]؟*

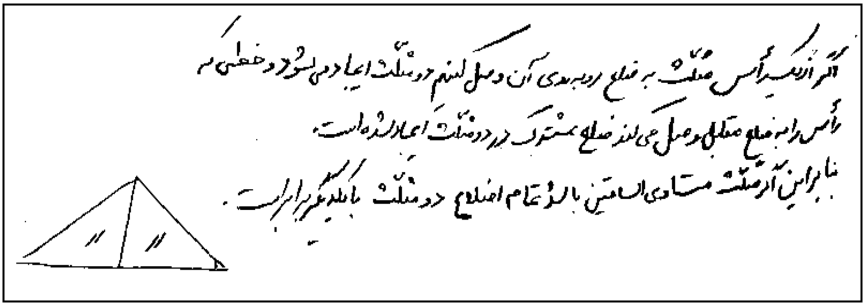
مهرداد *خب اگه شکل دقیقش رو بکشیم، معلوم می‌شه.*

در مقایسه با سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی [2] (۱۹۹۹)، علی و مهرداد در پایین‌ترین سطح یعنی «تجسم» هستند که با تفکر غیرکلامی شروع می‌شود و اجسام فقط با ظاهر آنها قضاوت می‌شوند. این در حالی است که دانش‌آموزی که در ادامه از آن صحبت می‌شود، در حال گذار از سطح تفکر «توصیفی» به تفکر «غیرصوری» است؛ برخی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌داند و تا حدی روابط بین آنها را شناسایی می‌کند.

الهه دانش‌آموز پایه هشتم، به رسم شکل اکتفا نمی‌کند، در استدلال خود نسبت به مهرداد یک قدم بزرگ برمی‌دارد. وی در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع، با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث به دست‌آمده، برابری مساحت‌ها را نتیجه گرفت (شکل ۵ را ببینید).

[1] هنگام پیاده‌سازی مصاحبه‌ها، توضیحات لازم و رخدادهای غیرکلامی در کروشه آورده شدند.

[2] van Hiele



شکل ۵: پاسخ الهه دانش‌آموز پایه هشتم

الهه: *من گفتم اگه از یک رأس مثلث به ضلع روبروی آن وصل کنیم، دو مثلث ایجاد می‌شود. این دو مثلث یک ضلع مشترک دارند. خطی که رأس را به ضلع مقابل وصل می‌کند، خودش یک ضلع مشترک بوده. اگه مثلثمون متساوی‌الساقین باشه که همه ساقاش برابرند، پس این دو تا ساقش هم با هم برابرند، یعنی ضلع پایین.*

مصاحبه‌کننده: *کدوم ضلع‌ها می‌شه؟ دست می‌گذاری روشون؟*

الهه: *[با اشاره به هر سه ضلع مثلث اولیه می‌گوید:] یعنی اینا در مثلث متساوی‌الساقین هر سه با هم برابرند [منظورش مثلث متساوی‌الاضلاع است].*

مصاحبه‌کننده: *هر سه تا ضلع با هم برابرند؟*

الهه: *بله.*

مصاحبه‌کننده: *خب.*

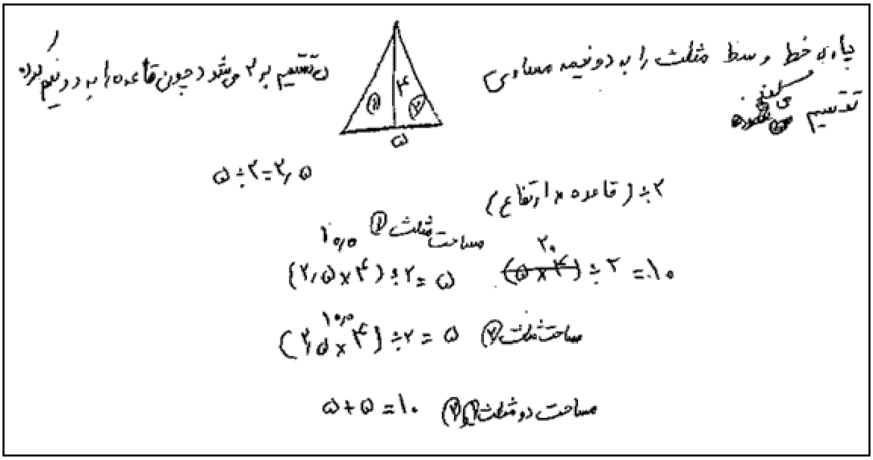
الهه: *[با اشاره به ضلع پایین] اگر این را هم نصف کنیم. ضلع‌های پایین هم با هم برابر می‌شوند. تقریبا نقش نمیساز داره [منظورش میانه است]. دیگه همین، گفتم دو تا مثلث ایجاد می‌شه، بنابراین می‌تونند با هم برابر باشند.*

مصاحبه‌کننده: *وقتی دو مثلث برابر باشند، مساحتشون هم با هم برابرند؟*

الهه: *بله. اندازه اضلاع با هم برابره.*

هر چند الهه لغات متساوی‌الساقین، ساق و نیمساز را به درستی به‌کار نمی‌گیرد ولی منظور خود، از هم‌نهشتی دو مثلث به حالت سه ضلع را به سختی بیان می‌کند. اگر از اشکالات وی در نامیدن اشکال هندسی صرف نظر شود، وی نسبت به مهرداد، یک استدلال استنتاجی برای رده‌ای خاص از مثلث‌ها ارائه داده است. البته اشکال این استراتژی آن است که از ویژگی‌های خاص رده مثلث‌های متساوی‌الاضلاع استفاده شده و بنابراین قابل تعمیم به همه مثلث‌ها نیست. مسئله‌حل‌کن‌های مبتدی، از جمله، بیشتر شرکت‌کنندگان این پژوهش در دام ویژگی‌های رده خاصی از مثلث‌ها افتادند.

وجه دیگر ساختار پاسخ الهه توسل به یک حلقه میانی (هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده) در زنجیره استدلالی، برای رسیدن به برابری مثلث‌هاست؛ درصورتی که تعداد انگشت شماری از شرکت‌کنندگان از جمله شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم، از ابتدا مستقیم سراغ مساحت رفتند. وی با در نظر گرفتن یک مثلث با اندازه قاعده و ارتفاع معلوم، اقدام به محاسبه مساحت مثلث اولیه و دو مثلث حاصل از رسم میانه کرد (شکل ٦ را ببینید).



شکل ٦: پاسخ شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم[۱] (قسمت اول)

شاهرخ در مصاحبه اذعان کرد که مثلث رسم شده دو ساق برابر دارد. او بدون اینکه درمورد برابریِ میانه و ارتفاع در مثلث‌های متساوی‌الساقین حرفی به میان آورد، ارتفاع را همان میانه در نظر گرفت. تکیه شاهرخ به دریافت بصری و باور اینکه با یافتن مثالی که در گزاره مورد سوال صدق کند، گزاره تصدیق می‌شود، نشان از ناپختگی پاسخ او دارد؛ هرچند که در بخش بعدی خواهیم دید اقدام به محاسبه مساحت در یک مثال عام، شاهرخ را از دام ویژگی‌های خاص مثالش بیرون می‌آورد.

- *رویه کلی*[۲]

سمدنی[۳] (۱۹۸٤) در بحث خود از اثبات‌های *حرکتی*[٤]، تحلیل بسیار خوبی مهیا می‌کند که می‌تواند معنای «رَویه کلی» را به خوبی روشن نماید. وی اذعان می‌کند که یک *اثبات* حرکتی با انجام «حرکت‌های فیزیکی، عینی مشخص (دست‌ورزی با اشیاء، رسم شکل و حرکت جسم و غیره) روی یک مثال برای تایید ادعایی روی یک موردِ داده شده، شروع شود» (ص. ۳۲). سپس رویه و روش استدلال به مثال‌های دیگر تعمیم داده می‌شود. زمانی می‌رسد که دیگر نیازی به حرکتهای فیزیکی نیست، انواع حرکت‌ها در ذهن فرد دنبال می‌شوند. تا زمانی که شخص «بداند [آنها] چگونه برای مثال‌های متعدد دیگر انجام می‌شوند» (ص. ۳۲)، هر بار این اتفاق می‌افتد. این حالت همان *درونی‌سازی* در نظریه پیاژه (۱۹۷۰) و مدل اسفارد (۱۹۹۱) است. زمانی که این فرایندِ

---

[۱] از آنجا که نحوه خواندن نوشته‌های متن ممکن است درستی پاسخ را تحت تاثیر قرار دهد، باید تاکید کرد شاهرخ اولین جمله خود را در مصاحبه به این شکل خواند: «پاره‌خطِ وسط، مثلث را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند.»

[۲] General Procedure

[۳] Sémadéni

[٤] Action Proof

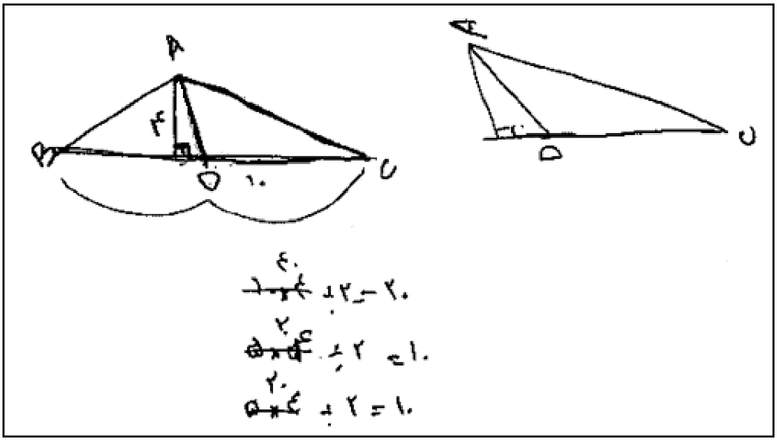
تعمیم کامل می‌شود، شخص یک «رویه کلی» دارد که می‌تواند آن را روی هر عضوی از یک رده به‌کار گیرد.

ایده شاهرخ در قسمت قبل را به یاد آورید، اقدام به محاسبه مستقیم مساحت‌ها. ادامه داستان شاهرخ در مکالمه او با مصاحبه‌کننده منجر به یافتن یک مثال عام شد.

مصاحبه‌کننده	*پس شما یک مثلث متساوی‌الساقین در نظر گرفتی، اگر نخواهیم ساق‌هاش با هم برابر باشه چطور؟*
شاهرخ	*[چند ثانیه سکوت]*
مصاحبه‌کننده	*می‌خوای من یکیش رو برات برای مثال بکشم؟*
شاهرخ	*یکی از ضلعاش اندازه‌اش کمتره.*
مصاحبه‌کننده	*همین کار رو می‌خوام بکنم. مثلا می‌خوام این یک ضلعش باشه [و شروع به ترسیم مثلث سمت چپ در شکل ۷ می‌کند]؛*
شاهرخ	*باید یکم کمتر بگیرید.*
مصاحبه‌کننده	*این رو یکم بیشتر می‌گیرم، این دو تا را به هم وصل می‌کنم. این یه مثلثه که هیچ کدوم از ضلع‌هاش با هم برابر*
شاهرخ	*نیست.*
مصاحبه‌کننده	*برابر نیست. حالا بیا از یک رأسش به وسط ضلع مقابلش وصل کن.*
شاهرخ	*[در حال رسم میانه]*
مصاحبه‌کننده	*سعی کن وسط بکشی. [بعد از چند ثانیه]، خیلی خب حالا ببین از این رأس به وسط ضلع مقابل رسم کردی. الان دو تا مثلث به دست آوردی، آیا این دو مثلث هم مساحت‌هاش با هم برابر هستند؟*
شاهرخ	*نه.*
مصاحبه‌کننده	*چرا برابر نیست؟*
شاهرخ	*چون، [بریده و نامفهوم حرف می‌زند]. اندازه‌هاشون، یکی‌شون مساوی نیستند [نمی‌تواند کلمات درستی را فراخوان کند ولی از اشاره‌ای که به شکل دارد مصاحبه‌کننده فکر می‌کند منظور او را متوجه شده است و ادامه می‌دهد].*

مصاحبه‌کننده *این دو تا [مثلث] با هم برابر نیستند، شبیه هم نیستند.*

شاهرخ *بله.*



شکل ۷: پاسخ شاهرخ دانش‌آموز پایه هفتم (قسمت دوم)

در مکالمه بالا مصاحبه‌کننده تلاش می‌کند موقعیتی فراهم کند که شاهرخ درمورد پیش‌فرض خود در مورد برابری مساحت مثلث‌ها حرف بزند: «مساحت دو مثلث در صورتی برابر است که آن دو مثلث هم‌نهشت (برابر) باشند». مانند شاهرخ بسیارند افرادی که به جهت استنباط دیداری، هم‌نهشتی را شرط لازمِ برابری مساحت می‌دانند، در حالی که شرط کافی است. به این ترتیب در ادامه مکالمه، مصاحبه‌کننده به دنبال ساخت مثال عامی است که شاهرخ علاوه بر اینکه متوجه پیش‌فرض غلط خود شود، درستی گزاره مورد سوال را هم برای هر مثلثی درک نماید.

مصاحبه‌کننده *خودت بهم گفتی مساحت مثلث رو که می‌خوای پیدا کنی، قاعده رو ضرب در ارتفاع می‌کنی، بعد تقسیم بر دو می‌کنی.*

شاهرخ *بله.*

مصاحبه‌کننده *اشکالی داره، من [اجزای] مثلث را نامگذاری کنم؟ [با تایید شاهرخ] A، B، C، اسم اینجا رو هم می‌گذارم D . BD با DC چیه؟*

شاهرخ *برابره.*

مصاحبه‌کننده *اندازه‌هاشون یکیه. خب، حالا که [اندازه] قاعده یکی هست، وقتی که*

می‌خوایم مساحت رو به دست بیاریم، دیگه باید چی رو داشته باشیم؟

شاهرخ *ارتفاع.*

مصاحبه‌کننده *ارتفاع. شما ارتفاع در این مثلث [با اشاره به مثلث ABD] رو برای من به دست بیار. نه، نه، ارتفاع وارد بر این قاعده [با اشاره به BD] رو پیدا کن. [بعد از رسم ارتفاع توسط شاهرخ]، آفرین. یعنی اینجا چه زاویه‌ایه؟*

شاهرخ ۹۰.

مصاحبه‌کننده *آفرین، ۹۰ درجه. حالا می‌خوام ارتفاع این مثلث [با اشاره به مثلث ADC] رو رسم کنی. می‌دونی باید چطور رسم بشه؟ ارتفاع وارد بر این قاعده [با اشاره به DC] رو رسم کن.*

شاهرخ *این قاعده؟*

مصاحبه‌کننده *بله. [با توجه به حرکت دست شاهرخ] شما اول می‌خواستی ارتفاع وارد بر AC رو رسم کنی، درسته؟*

شاهرخ *بله.*

مصاحبه‌کننده *[بعد از چند لحظه‌ای که شاهرخ با مثلث کلنجار می‌رود و به جایی نمی‌رسد.] بذار مثلث رو برات اینجا دوباره رسم کنم. [شروع به رسم مثلث سمت راستی می‌کند.] این A ، C، D . می‌خوایم ارتفاع وارد بر DC رو رسم کنیم.*

شاهرخ *[به رسم ارتفاع خارجی مثلث می‌پردازد.]*

مصاحبه‌کننده *آفرین[1]! دقیقا. یعنی این [اشاره به DC] رو چی کار می‌کنی؟*

---

[1] غالب شرکت‌کنندگان در رسم ارتفاع خارجی با مشکل مواجه بودند. مسئله اصلی بر سر اشکال در درک مفهوم ارتفاع است. آنچه در جای جای مصاحبه‌ها دیده می‌شد، دانش‌آموزان بسیاری درک مفهومی از تعاریف میانه، ارتفاع و نیمساز ندارند و گاهی به علت گذر زمان الگوریتم رسم را نیز فراموش کرده‌اند، مانند رسم ارتفاع خارجی. به این دلیل است که مصاحبه‌کننده از پاسخ درست شاهرخ متعجب و خوشحال شد.

شاهرخ	*ادامه‌اش می‌دم.*
مصاحبه‌کننده	*پس حالا اگر بخوای این ارتفاع را در شکل قبلی بکشی، آن را کجا می‌کشی؟*
شاهرخ	*روی همون ارتفاع قبلی.*
مصاحبه‌کننده	*یعنی ارتفاع‌هاشون یکی شد؟*
شاهرخ	*بله.*
مصاحبه‌کننده	*حالا ارتفاع‌شون یکی شد. قاعده‌هاشون چی بود؟*
شاهرخ	*قاعده‌هاشون یکیشون BD بود، یکی‌شون DC.*
مصاحبه‌کننده	*اون وقت اندازه‌هاشون چی بودن با هم؟*
شاهرخ	*برابر.*
مصاحبه‌کننده	*اون وقت مساحت‌ها برابر می‌شه، یا برابر نمی‌شه؟*
شاهرخ	*بله.*
مصاحبه‌کننده	*می‌شه؟*
شاهرخ	*[با اندکی مکث] می‌تونم بهش عدد بدم؟*
مصاحبه‌کننده	*بله، می‌شه.*
شاهرخ	*[شروع به دادن عدد و انجام محاسبات شکل ۷ می‌کند.] بله، مساوی می‌شه.*
مصاحبه‌کننده	*بسیار خب. پس مساحت‌ها تونست با هم برابر بشه، درحالی که شکل مثلث‌ها مثل هم نبود.*
شاهرخ	*بله.*
مصاحبه‌کننده	*چطور شد که مساحت‌ها برابر شد؟*
شاهرخ	*چون قاعده‌ها و ارتفاع‌ها برابر بود، مساحت‌ها برابر شد.*

حاصل گفت‌وگو منجر به شکل‌گیری رویه‌ای برای شاهرخ شد که می‌تواند آن را روی هر مثالی پیاده کند و برابری مثلث‌های حاصل از رسم میانه را ببیند. بنابراین تفکر او به سطح رویه کلی رسیده است. در انتهای مصاحبه، پاسخ شاهرخ درمورد برابری مساحت مثلث‌ها نشان می‌دهد، ساختار به صورت انتزاعی برای او شکل نگرفته و همچنان منشاء عملیاتی و نیاز به محاسبات عددی در فرایند فکری او دیده می‌شود.

- *ساختار مجرد*[1]

«سمدنی در جهت توسعه اثبات‌های حرکتی اظهار می‌کند که حرکت به سوی اثبات‌های مفهومی لزوماً وابسته به در نظر داشتن خصوصیاتِ عامِ موقعیت‌هایی است که قبلاً در ذهن مجسم شده‌اند» (بالاشف، ۱۹۸۸، ص. ۲۱۷). این «در نظر داشتن» مترادف با تعبیر میسن (۱۹۸۹) از تجرید است: «تغییرِ توجهِ ظریفی رخ می‌دهد، توجه، از یک حالت تعمیم یافته به یک شیء یا ویژگی معطوف می‌شود» (ص. ۲). ساختار مجرد «یک شیء ریاضی تکامل‌یافته[2]» (اسفارد، ۱۹۹۱) می‌باشد و تولد این شیء به معنای این است که دیگر، منشاءهای عملیاتی و رویه‌ایِ ساختار دیده نمی‌شوند. *تجریدی* که در اینجا مدنظر است شامل دو مرحلۀ «چگالش» و «جسمیت‌یافتن» در تعبیر اسفارد (۱۹۹۱) است. تجرید فرایندی است که مرحله «رویه کلی» را به «ساختار مجرد» ارتقا می‌دهد.

تفاوت محصول فرایند تجرید و تعمیم آن است که ساختارهای مجرد تقریبا مستقل از نوع بازنمایی هستند و می‌توان استدلال را به انحای مختلف ارائه نمود (اگرچه عامل‌های دیگری مانند فقدان مهارت در کار با نمادها، ممکن است این کار را با مشکل مواجه کند). به تعبیر اسفارد (۱۹۹۱) ادراک عملیاتی یک مفهوم

> باعث می‌شود که بدان، به جای موجودی بالفعل، به مثابه یک موجود بالقوه بنگریم که بنا به درخواست، در یک دنباله از اعمال به وجود می‌آید. بنابراین، در حالی که ادراک ساختاری ایستا (یا بهتر، آن چنانکه فرگه (۱۹۷۰) می‌گفت بگوییم «بی زمان»)، آنی و یکپارچه است، ادراک عملیاتی، پویا، پی در پی و با جزئیات است. (ص. ٤)

در فرایند یادگیری –هر نوع از یادگیری!– ویژگی‌های ثابت مشخصی مشاهده می‌شوند که ظاهراً تغییرات در محرک‌های بیرونی بر آنها اثری ندارند. تقدم

[1] Abstract Structure

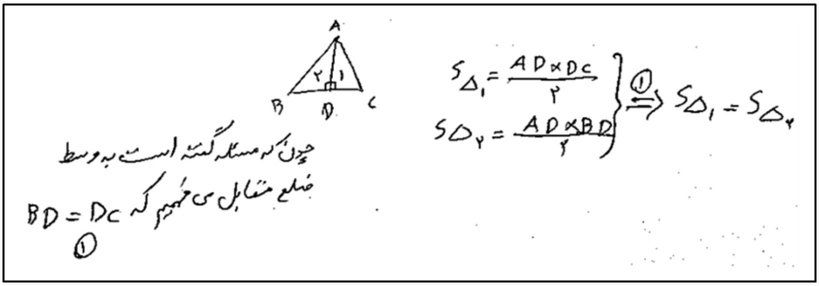
[2] A Fully-fledged Mathematical Object

ادراکات علمیاتی بر ساختاری[1] یکی از چنین ویژگی‌های پایا است. ... پیاژه، پیشگام این حوزه، در کتاب خود دربارهٔ معرفت‌شناسی تکوینی (۱۹۷۰، ص. ١٦) نوشته است: «مفهوم انتزاع شده [ریاضیاتی]، از شیء‌ای که عمل بر روی آن انجام گرفته، بیرون کشیده نمی‌شود، بلکه از خود عمل انتزاع می‌شود. به نظر من این، پایهٔ تجرید منطقی و ریاضی است». (همان، ص. ۱۷)

شخصی که دارای «ساختار مجرد» است به تعبیر اسکمپ (۱۹۷۳، ترجمه گویا، ۱۳۸٤) هم می‌داند چه کار می‌کند و هم می‌داند چرا این کار را می‌کند، یعنی قوانین و دلایل را هم‌زمان دارد. در حالی که در مرحله «رویه کلی» شخص فقط می‌داند چه کار می‌کند و درمورد چرایی عملش پاسخی ندارد.

سینا دانش‌آموز پایه هشتم در پاسخ به سوال پژوهش، استدلال زیر را در برگه خود تحویل مصاحبه‌کننده داد. این دانش‌آموز در مدرسه تیزهوشان مشغول به تحصیل بود و مشخصا در هنگام مصاحبه دریافت سریعی داشت. مصاحبه او کوتاه و فقط دو دقیقه و سی و پنج ثانیه طول کشید، در حالی که مدت زمان دیگر مصاحبه‌ها غالبا بیش از بیست دقیقه بود. سینا در پاسخ کتبی خود، ردهٔ خاص مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را در نظر گرفته و برای آنها برابری مساحت‌های مثلث‌های حاصل از رسم یکی از میانه‌ها را به‌طور مستقیم در حالت کلی اثبات کرده بود.

[1] به گفته اسفارد در حالت‌های نادری نوعی فهم شهودی خالص به دست می‌آید که «ادراک ساختاری مبهمی حاصل می‌شود، بدون آنکه پایهٔ عملیاتی کاملی شکل گرفته باشد. احتمالاً این همان فهمی است که ریاضیدانان هنگام معرفی اولین نسخهٔ مفهوم تابع داشتند. ... [این فهم] برای خلق یک نظریهٔ ریاضیِ تکمیل شده، کافی نیست؛ اما مطمئناً در کشف قضایا و در تعیین جهت‌های پیشرفت بعدی، بسیار مفید خواهند بود.» (صص. ۲۹–۳۰)



شکل ۸: پاسخ سینا دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت اول)

مصاحبه‌کننده — *لطفا بگو مسئله از شما چه چیزی خواسته و شما چه جوابی بهش دادی؟*

سینا — *گفته اثبات کنید که مثلا وقتی که از یک رأس مثلث، پاره‌خطی به وسط ضلع مقابل وصل کنیم، مساحت دو مثلث [ایجاد شده] مساوی هستند.*

مصاحبه‌کننده — *خب.*

سینا — *من مساحت هر مثلث رو نوشتم چطور به دست میاد. گفته قاعده هر دوتاشون برابره، چون گفته به وسط ضلع وصل بشه. بعد دیگه مساحتشون برابر می‌شه.*

مصاحبه‌کننده — *ببین شما وقتی AD رو رسم کردی، BC رو نصف کرده. از کجا متوجه شدی AD ارتفاعه؟*

سینا — *خب اینجا فرض گرفتم.*

مصاحبه‌کننده — *فرض گرفتی. مثلث ABC چه مثلثیه که میانه‌اش همون ارتفاعشه؟*

سینا — *متساوی‌الاضلاع.*

هرچند پاسخ بالا برای سوال پژوهش ناکافی است، اما برای این حالت خاص یک ساختار مجرد صورت‌یافته‌ای دارد که به راحتی قابل تعمیم به حالت کلی است. فقط کافی است سینا در حالت کلی ارتفاع مثلث‌ها را شناسایی کند.

مصاحبه‌کننده — *حالا بیا مثلث رو متساوی‌الاضلاع در نظر نگیر، مختلف‌الاضلاع در نظر بگیر.*

سینا *[سینا شروع به کشیدن یک مثلث مختلف‌الاضلاع شکل ۹ کرد.]*

مصاحبه‌کننده *خیلی خب، آفرین، به وسط ضلع می‌کشی. حالا، آیا مساحت مثلث AMC با مساحت مثلث AMB برابر هست یا نه؟*

سینا *هووم. برابره دیگه.*

مصاحبه‌کننده *چرا برابره؟*

سینا *چون که کلا [چند لحظه سکوت]*

مصاحبه‌کننده *شما برای اینکه مساحت رو به دست بیاری مگه نگفتی ارتفاع رو می‌خوای؟*

سینا *بله.*

مصاحبه‌کننده *حالا دیگه AM ارتفاع نیست، ارتفاع رو بکش. برای AMB ارتفاع رو بکش.*

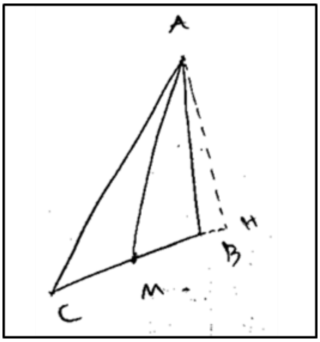
سینا *AMB*

مصاحبه‌کننده *کدوم قاعده رو باید در نظر بگیری؟*

سینا *BC*

مصاحبه‌کننده *آهان. این ارتفاعش شده [سینا AH را رسم کرد]. ارتفاع AMC چیه؟*

سینا *اونم همینه. خب قاعده‌شون برابره، ارتفاعشون هم برابره، پس مساحت‌ها برابرند.*



شکل ۹: پاسخ سینا دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت دوم)

در مکالمه بالا، سینا استدلال اولیه خود را به مثلث‌های مختلف‌الاضلاع تعمیم داد. وی به راحتی اجزای ساختار اثبات را یکی یکی شناسایی نمود. ارتفاع وارد بر

قاعده‌های CM وMB که اندازه‌های برابر دارند، ترسیم کرد. با توجه به ارتفاع مشترک بین دو مثلث و برابری اندازه قاعده‌ها، برابری مساحت‌ها را نتیجه گرفت. سینا بر خلاف شاهرخ ارتباط بین اجزای یک ساختار مجرد را به صورت یکپارچه و آنی در نظر داشت و نیازی به محاسبه و انجام عملیات حسابی یا جبری برای دیدن برابری مساحت‌ها نداشت. به نظر می‌رسد وی به راحتی قادر به نوشتن صورت جبری اثبات بود ولی مصاحبه‌کننده چنین درخواستی از وی نکرد.

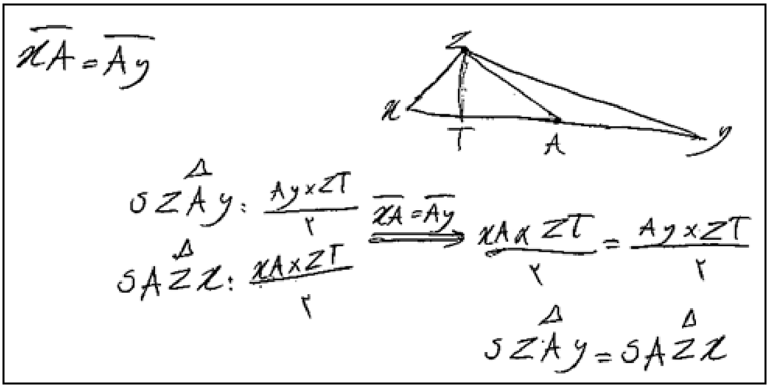
- *اثبات صورت‌بندی شده*[۱]

برای رسیدن به مرحله اثبات صورت‌بندی شده، توانایی توصیف ساختار مجرد به روشی قابل قبول الزامی است. بالاشف (۱۹۸۸) اذعان داشت زبان روزمره به صورت‌بندیِ یک اثبات کمک می‌کند، اما کافی نیست. جبر به عنوان زبان ریاضی نه فقط برای برقراری ارتباط، بلکه به عنوان ابزاری برای استنتاج‌های منطقی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گذار از «ساختار مجرد» به «اثبات صورت‌بندی شده» یک فرایند *صوری‌سازی* است (شکل ۲ را ببینید). در این فرایند یک ساختار مجرد که یک شیءِ شخصی و وابسته به فرد است، به صورت یک اثبات تبدیل می‌شود که می‌توان آن را با دیگران به اشتراک گذاشت. اثبات به «صورتی» ارائه می‌شود که ساختار آن برای دیگران قابل دسترس باشد.

فرایند فکری امیرحسین هم مشابه سینا در بخش قبل در طی مصاحبه پیش رفت تا ساختار اثبات را به دست آورد. سپس ساختار ذهنی خود را در قالب عبارات جبری بازنمایی کرد (شکل ۱۰ را ببینید). در این حالت یک اثبات صورت‌بندی شده، ارائه شده است.

[۱] Formulated Proof



شکل ۱۰: پاسخ امیرحسین دانش‌آموز پایه هفتم

مسیر صورت

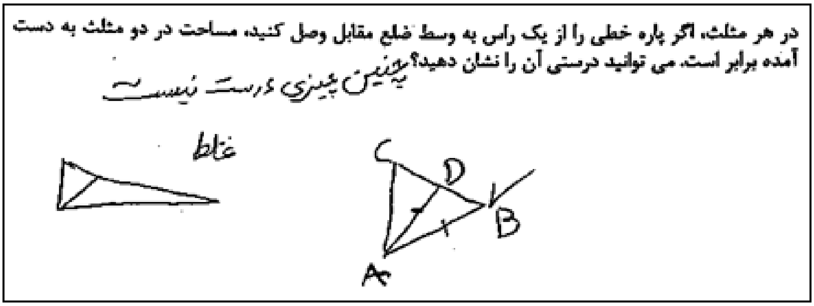
در ابتدای مسیر صورت، افراد به دلیل فقدان درک کافی از گزاره‌ای که باید اثبات شود، گاهی حتی نمی‌توانند مثالی بیاورند که در گزاره صدق کند؛ اما استدلال‌هایی می‌آورند که به نظر خودشان درست هستند، چرا که صورت و ظاهر آنها مشابه استدلال‌هایی است که در کتاب درسی یا کلاس ریاضی دیده‌اند. در این مرحله، پاسخ، یک *تقلید صوری*[۱] است و به ازایِ بازنمایی‌های نمادی به‌کار گرفته شده، در ذهن دانش‌آموز مفاهیم مرتبط وجود ندارد و استدلال‌هایش بر اساس یک درک معنایی پیش نرفته و اشتباه است. همان‌طور که دانش‌آموزی در طول مسیر صورت حرکت می‌کند، مهارت بیشتری در انجام عملیات حسابی و جبری نشان می‌دهد. در انتهای مسیر، قادر است درستی و صحتِ صوری هر مرحله از اثبات را تعیین کند و اثبات‌های نحویِ معتبری تولید نماید، اما بازنمایی‌های نمادی هنوز هم توخالی هستند. در این حالت *اثبات فرمولی*[۲] حاصل می‌شود. عماد دانش‌آموز پایه هشتم است که در طول مصاحبه در مسیر صورت حرکت می‌کند.

---

[۱] Formal Mimicry

[۲] Formulaic Proof

وی در پاسخ به سوال پژوهش، در هنگامی که بـه صـورت انفـرادی بـه سـوال فکـر می‌کرد، درستی گزاره مطرح شده را با آوردن مثال نقض رد نمود (شـکل ۱۱ را ببینیـد). مثال نقض، یک مثلث مختلف الاضلاع با یک زاویه راست است که میانه آن بدون دقت ترسیم شده است؛ در حالی که از نظر او مثلث متساوی‌السـاقین در گـزاره مطـرح شـده صدق می‌کند. استدلال اولیه عماد بر پایه شهود و با این پیش‌فرض است که در صـورتی مساحت دو مثلث برابر است که آنها هم‌نهشت باشند. به این ترتیـب در مثلـث مختلـف الاضلاع با رسم میانه دو مثلث با مساحت برابر به دست نمی‌آید.



شکل ۱۱: پاسخ عماد دانش‌آموز پایه هشتم

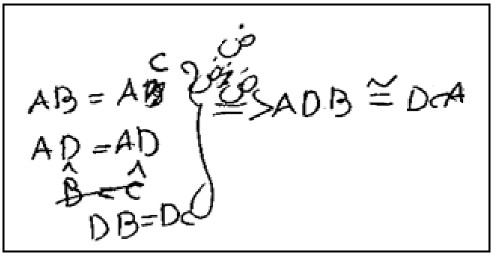
در هنگام مصاحبه، مصاحبه‌کننده از عماد می‌خواهد دلیل درستی گزاره در مورد مثلث متساوی‌الساقین را بیان کند.

عماد	*$AB=AC$ چـون مثلـث ABC متساوی‌السـاقینه. $AD=AD$ مشـترک. زاویه B و زاویه C برابرند چون مثلـث متساوی‌السـاقینه. دو ضـلع و زاویه بین برابر می‌شوند.*
مصاحبه‌کننده	*دو ضلع و زاویه بین. [مصاحبه‌کننده با اشاره به اجزای مثلث در شکل ۱۱ ادامه می‌دهد:] ضلع‌هایی که شما گفتی، یکی این ضلع مشـترکه و این دو تا، اون وقت زاویه‌های بینشون کدومه؟*
عماد	*[اشاره به زوایای B و C]*
مصاحبه‌کننده	*باید زاویه‌های بینشون رو در نظر بگیری. خود شما هم بـین نوشـتی، دو ضلع و زاویه بین [ض‌زض] (شکل ۱۲ را ببینید).*

عماد		*خب یک روش دیگه بگم. [سکوت]*

مصاحبه‌کننده		*یک بار دیگه از روی سوال بخون.*

عماد		*اگر پاره‌خطی را از یک رأس به وسط ضلع مقابل وصل کنید، آهـان DB=DC . [شروع به اصلاح پاسخ خود در شکل ۱۲ نمود.]*

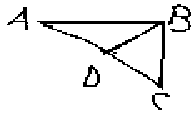


شکل ۱۲: ادامه پاسخ عماد دانش‌آموز پایه هشتم (قسمت دوم)

عماد در پاسخ خود مثلـث ABC را متساوی‌السـاقین در نظـر گرفتـه و بـرای اثبـات هم‌نهشتی دو مثلث ABD و BCD، دو ضلع و یک زاویه برابـر در مثلـث را مشـخص نمود. ولی به اشتباه، زاویه در نظر گرفته شده بین دو ضلع نیست. اشتباه از آنجـا ناشـی می‌شود که او دلیل برابری دو مثلث را در حالت‌هـای مختلـف هم‌نهشـتی (ض‌ض‌ض، ض‌زض، زض‌ز) نمی‌داند. بنابراین در چنین موقعیتی که ارتباط اجزای مثلث بـرای وی به خوبی شکل نگرفته، صورت و ظاهر آنچه از قبل دیده است را تقلید می‌کند. در ادامه وقتی دوباره سوال را می‌خواند، به فرض دیگری در مسئله می‌رسد که به راحتی حالـت هم‌نهشتی سه ضلع را نتیجه می‌گیرد. اثبات هم‌نهشتی دو مثلـث ABD و BCD ، یـک اثبات نحویِ معتبر است. اما در ادامه مصاحبه مشخص می‌شود استدلال‌ها بر اساس یک درک معنایی پیش نرفته و بازنمایی‌های نمادی هنوز هم بـرای عمـاد معنـادار نیسـتند و بنابراین پاسخ شکل ۱۲ یک *اثبات فرمولی* است.

مصاحبه‌کننده		*پس وقتی دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌هاشون هم با هم برابرند. حالا بیا یک مثلث مختلف‌الاضلاع بکش، وسط یکی از ضـلع‌هاش رو دقیق پیدا کن و از رأس روبروش بهش وصل کن.*

عماد



مصاحبه‌کننده *خب حالا دو مثلث به دست اومد، [با اشاره به مثلث بالا] می‌خوایم ببینیم مساحت این مثلث با مساحت این مثلث برابرهست یا نه.*

عماد *می‌تونیم بگیم* $DA=DC$ *،* BD *هم مشترکه.* AB *با* AC *هم که برابر نیست، اگه* BD *نیمساز باشه، شاید بتونیم بگیم برابره.*

عماد از یک طرف دوباره زوایایی را انتخاب می‌کند که بین اضلاع متناظر دو مثلث نیست، از طرف دیگر با علم به این که ضلع سوم دو مثلث برابر نیستند به دنبال اثبات هم‌نهشتی آنهاست.

- **مسیر رویه**

دو مرحله ابتدایی از مسیر رویه با مسیر ساختار مشترک است. دانش‌آموز با آغاز از مثال به یک رویه کلی می‌رسد، ولی در ادامه به جای تجریدِ رویه کلی، با صوری کردن آن، کار به انجام می‌رساند و دیگر ادامه نمی‌دهد. اینجاست که حاصل کار وی، یک *اثبات رویه‌ای*[1] خواهد بود.

پیش از این در مورد خصوصیات مرحله «رویه کلی» گفته شد که بین اشیاء و اجزای مسئله، ارتباط عملیاتی (حرکتی، محاسباتی) وجود دارد. در اثبات رویه‌ای، این عملیات، صوری می‌شود. فاطمه‌سادات دانش‌آموز پایه هشتمی است که فرایند فکری جالبی برای صوری کردن عملیات محاسبه مساحت مثلث طی می‌کند. مثلث در نظر گرفته شده مختلف‌الاضلاع است و فاطمه‌سادات قصد دارد برابری مساحت دو مثلث حاصل از رسم یکی از میانه‌ها را ثابت کند.

[1] Procedural Proof

فاطمه‌سادات *اگر من ارتفاع این [مثلث ABC در شکل ۱۳] رو رسم کنم. مثلا AT. AT را ضرب در قاعده‌اش می‌کنم که همون BC هست. بر ۲ تقسیمش می‌کنم. این مساحت مثلث ABC رو می‌ده.*

مصاحبه‌کننده *خب.*

فاطمه‌سادات *دوباره اگر من بیام ارتفاع این [مثلث ACD در شکل ۱۳] رو رسم کنم. بعد CZ رو ضرب در قاعده این کنم که AD هست، تقسیم بر ۲ کنم، میشه مساحت مثلث ACD.*

مصاحبه‌کننده *بله.*

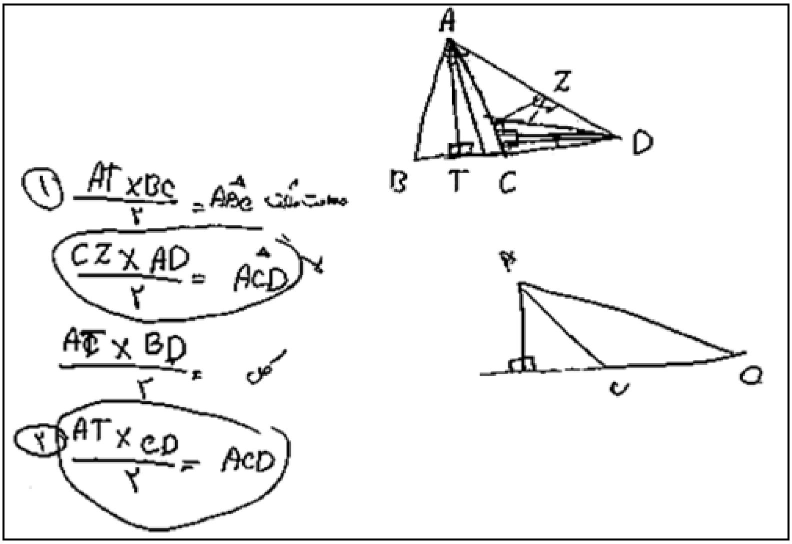
فاطمه‌سادات *بعد مساحت کل مثلثم میشه AC ضرب در BD تقسیم بر ۲. مساحت کل. میشه قاعده رو یکی دیگه بگیرم؟ این نمی‌شه؟*

مصاحبه‌کننده *چرا نمی‌شه؟*

فاطمه‌سادات *ارتفاعش [AC] بر این [BD] عمود نمی‌شه.*

مصاحبه‌کننده *اگر در مثلث بزرگتر بخوای ارتفاع وارد بر BD را بکشی، چه کار باید بکنی؟ [چند لحظه سکوت]*

همان‌طور که در پانوشت بخش «رویه کلی» گفته شد، غالب دانش‌آموزان مفهوم ارتفاع را کامل و درست درک نکرده بودند. حتی در موارد قابل توجهی مانند فاطمه‌سادات نحوه ترسیم آن را فراموش کرده بودند. از اینجا به بعد مصاحبه فاطمه‌سادات با صحبت درمورد یافتن ارتفاع مثلث ABD و ACD ادامه پیدا کرد. در شکل ۱۳ آزمون و خطاهای فاطمه‌سادات برای ترسیم پاره‌خط‌هایی عمود (ارتفاع) آشکار است. بعد از چند دقیقه گفت و شنود و تامل، وی متوجه شد AT ارتفاع مشترک بین هر سه مثلث مورد نظر است. بنابراین فرمول‌های مساحت را مانند تصویر شکل ۱۳ تصحیح و تکمیل کرد.



شکل ۱۳: پاسخ فاطمه‌سادات دانش‌آموز پایه هشتم

در ادامهٔ مصاحبه، فاطمه‌سادات به تفکر صوری خود ادامه می‌دهد. هدف اصلی مسئله، یعنی اثبات برابری مثلث‌ها را فراموش می‌کند و با مهارت خوبی شروع به محاسبات جبری می‌کند.

فاطمه‌سادات　*خب حالا اگه من این دو تا را با هم جمع کنم [روابط ۱ و ۲ در شکل ۱۳]، باید برابر با مساحت کل بشه. BC و CD با هم برابرند، می‌تونم به‌جای CD، BC هم قرار بدم [شروع به نوشتن عبارات جبری زیر کرد]. خب من می‌تونم مخرج‌هاشونو در نظر نگیرم.*

$$BC=CD=\frac{BD}{2}$$

$$\frac{AT\times BC}{2}+\frac{AT\times \overset{BC}{CD}}{2}=\frac{AT\times BD}{2}$$

مصاحبه‌کننده　*آیا [با اشاره به عبارت جمعی بالا] جمع این دو تا برابره AT ضرب در BD هست؟*

فاطمه‌سادات　*خب به جای CD می‌تونم BC رو قرار بدم. خب این دو تا شبیه*

هم شدند. اون وقت می‌تونم بنویسم دو تا AT ضرب در BC برابره AT ضرب در BD .

$$۲(AT \times BC) = AT \times BD$$

مصاحبه‌کننده — *BC برابر با چی هست؟ چی رو نصف کردی؟*

فاطمه‌سادات — *BD.*

مصاحبه‌کننده — *بنویس BD/2 .*

فاطمه‌سادات — *آهان الان به جای BC می‌تونم BD/2 بذارم. میشه*

$$۲(AT \times BC) = AT \times BD$$
$$۲\ AT \times \frac{BD}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲}$$
$$۲AT \times BD = AT \times BD$$

مصاحبه‌کننده — *درست شد؟*

فاطمه‌سادات — *بله. نه! اینجا یه ۲ اضافه هست!*

مصاحبه‌کننده — *می‌تونی بگی اشکال کارت چی بود؟*

فاطمه‌سادات — *[سکوت]*

مصاحبه‌کننده — *دو ضرب در ۱۰ به‌علاوه ۵ میشه چی؟ ۲ یه بار در ۱۰ ضرب میشه، یه بار در ۵. ولی اگه ۲ ضرب در ۱۰ ضرب در ۵ بشه چی؟*

۲(۱۰×۵)

۲(۱۰×۵)

فاطمه‌سادات — *یعنی اول ۱۰ ضرب در ۵ میشه.*

مصاحبه‌کننده — *فرق نمی‌کنه می‌تونی بنویسی ۲ ضرب در ۱۰ ضرب در ۵.*

۲×۱۰×۵

فاطمه‌سادات — *[با اشاره به آخرین عبارت جبری که خودش نوشته بود،] یعنی ۲ فقط ضرب در AT می‌شه.*

مصاحبه‌کننده — *فرقی نمی‌کنه*

فاطمه‌سادات *[حرف مصاحبه‌کننده را قطع می‌کند و می‌گوید:] آهان یعنی این ۲ حذف می‌شه.*

$$\cancel{2}\,AT \times DD = AT \times BD$$

مصاحبه‌کننده *اصلا کاری نداریم که جمع مساحت مثلث اول و دوم برابر مساحت کل می‌شه. سوال اینه که آیا مساحتشون با هم برابر هست؟*

فاطمه‌سادات *بله.*

مصاحبه‌کننده *چرا؟*

فاطمه‌سادات *چون BC و CD با هم برابرند.*

اشتباه فاطمه‌سادات در استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، به‌جای خاصیت شرکت‌پذیری محاسبات او را دچار اشکال کرد. فاطمه‌سادات در سطر آخر مکالمه، در پاسخ به سوال دلیل برابری مساحت دو مثلث، به برابری قاعده آنها اکتفا نمود. واضح است که فاطمه‌سادات با داشتن فرمول مساحت دو مثلث در شکل ۱۳ (روابط ۱ و ۲)، تنها تفاوت آنها را در قاعده‌های متفاوت می‌بیند. ارتباط بین اجزای اثبات (ارتفاع، قاعده و مساحت دو مثلث) از ابتدا تا انتهای اثبات، مرحله به مرحله و همراه با جزئیات بود، در حالی که اگر ساختاری مجرد در ذهن فاطمه‌سادات نقش بسته بود، در پایان ادراکی آنی و یکپارچه ارائه می‌کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله عملکرد و برداشت‌های دانش‌آموزان موقع ساختن یک اثبات هندسی توصیف شد. برای تحلیل و توصیف داده‌ها، از مدل تبیین‌شده در پژوهش احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) استفاده شد که مبتنی بر توصیف خواندن و چگونگیِ ساخت اثبات‌های جبری دانش‌آموزان پایه هفتم و هشتم در یک مبحث نظریه اعداد بود. برای

این کار، ابتدا در یک مطالعه مقدماتی[1]، قابلیت آن مدل برای توصیف اثبات‌های هندسی تأیید شد و بدین سبب، با همان مدل، داده‌های این پژوهش تحلیل شدند.

یافته‌های این پژوهش، چالش‌های دانش‌آموزان را بخصوص در مرحله آزمایش ساده‌انگارانه نشان داد. در مقایسه با نتایج حاصل از پژوهش احمدپور و همکاران (۲۰۱۹) تنوع برداشت‌ها و پاسخ‌های ساده‌انگارانه دانش‌آموزان در مسائل هندسی بیشتر از مسائل نظریه اعداد است. چرا که در اثبات‌های هندسی دانش‌آموزان باید میان دیدن (یک شکل عینی) و نتایج استنتاجی (یک صورت مجرد) تفاوت قائل شوند.

در حالی که میزان موفقیت شرکت‌کنندگان هر دو پژوهش در گذار از هر مرحله، وابسته به دقتِ دانسته‌های آنهاست؛ دانستن ویژگی‌های اشیای حسابی، جبری و هندسی مسئله، دیدن ارتباط بین آنها و توانایی قرار دادن‌شان در زنجیره‌ای از استنتاج‌های منطقی در اثبات‌های هر دو پژوهش مشترک و مشابه است.

چالش دیگر دانش‌آموزان که در مسائل هندسی نمود بیشتری دارد، اسامی و اصطلاحات اشیاء و مفاهیم هندسی است. این لغات برای دانش‌آموزان دشوار است. مشکل زمانی دو چندان می‌شود که فرایند یادگیری این اصطلاحات با مسمَای خود در ارتباط نباشند و به صورت طوطی‌وار حفظ شوند.

خوشبختانه در سال‌های اخیر با تغییر نگاه در تدوین مطالب هندسی در کتاب‌های درسی امکان تدریس مفهومی این مطالب بیشتر شده است. وقتی ریاضی صرفاً در سطح استنتاج صوری تدریس شود، دانش‌آموزانی که ادراک کافی از مفاهیم ریاضی پیش‌نیاز ندارند، صرفا به تقلید صورت استنتاج‌ها می‌پردازند. مشکل زمانی دوچندان می‌شود که چنین تقلیدی از سوی معلمان مورد انتظار و کافی باشد. دیمل و هربست[2] (۲۰۲۰) توصیف دقیقی از انتظار معلمان ریاضی درمورد نحوه ارائه اثبات‌های هندسی توسط

[1] Pilot Study

[2] Dimmel & Herbst

دانش‌آموزان بر روی تخته کلاس گزارش نمودند. نتایج پژوهش آنها نشان داد که رونویسی اثبات‌های هندسی توسط دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی شرکت کننده در تحقیق مورد انتظار و معمول است.

نتایج حاصل از این پدیدارنگاری، ما را به سوی این دیدگاه پیش خواهد برد که در هنگام برنامه‌ریزی‌های آموزشی با در نظر داشتن مسیرهای مختلف یادگیری، به نیازهای همه دانش‌آموزان، چه در سطح کلان و چه در سطح خرد توجه شود و امکان تحقق برابری آموزشی بیشتر گردد. هم‌چنین مطالعه بیشتری لازم است تا در یک برنامه درسی ریاضی جامع، سمت و سو و تمرکز فعالیت‌های اثباتی نسبت به مسیرهای سه‌گانه (ساختار، صورت و رویه) مشخص شود. از یک طرف، هر سه مسیر، درنهایت می‌توانند به اثبات‌های صوری قابل پذیرش ختم شوند، اما عمقِ ادراک حاصل از سه مسیر متفاوت است. از طرف دیگر اثر متقابلی که مسیرها می‌توانند بر هم داشته باشند، گویای سودمندیِ بالقوه مسیرهای صورت و رویه، در افزایش فهم و درک دانش‌آموزان است.

منابع

اسکمپ، ریچارد. (۱۹۷۳). فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری. ترجمه زهرا گویا. (۱۳۸٤). *مجله رشد آموزش ریاضی*، شماره ۸۱، صص. ٤–۱۵. دفتر انتشارات و فناوری آموزشی ، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

باقری طاقانکی، حسین. (۱۳۸۸). *درک و فهم دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان از اثبات*. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.

ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده؛ کلاهدوز، فهیمه. (۱۳۹۱). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی. *فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران، سال ششم*، شماره ۲٤، صص. ۱۵۷–۱۸۲.

فیلیک، اووه. (۱۹۹۸). *درامدی بر تحقیق کیفی*. ترجمه هادی جلیلی. (۱۳۸۸). چاپ دوم. تهران: نشر نی.

گال، مردیت؛ بورگ، والتر؛ گال، جویس. (۱۹۹٦). *روش‌های تحقیق کمی و کیفی در علوم تربیتی و روانشناسی*. ترجمه احمدرضا نصر و همکاران. (۱۳۸۲). چاپ پنجم (۱۳۸۹). تهران: نشر دانشگاه شهید بهشتی و سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهی (سمت).

یافتیان، نرگس؛ صفابخش چکوسری، اشرف. (۱۳۹۹). سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی بین دانش‌آموزان پایه هشتم. *مجله رشد آموزش ریاضی*، شماره ۱۳۵، صص. ۸–۱۳. دفتر انتشارات و فناوری آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

Ahmadpour, F., Reid, D., & Fadaee, M. R. (2019). Students’ ways of understanding a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 85–104.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, (pp. 216–235). Hodder and Stoughton, London.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. and Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L.I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III, Higher Education Press, Beijing, pp. 907–920.

Bartolini, M. G., & Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp. 365-372). Springer Science and Business Media Dordrecht.

Clement, L. L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, 11, 97-102.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhäuser: Boston.

Dimmel, J. K.; Herbst, P. G. (2020). Proof transcription in high school geometry: a study of what teachers recognize as normative when students present proofs at the board. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(1), 71-89.

Harel, G., & Tall, D. O. (1991). The General, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). Proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396–428.

Herscovics, N., & Bergeron, J. C. (1988). An extended model of understanding. In M. J. Behr, & C. B. Lacampagne, (Eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 15–22). De Kalb, IL: Northern Illinois University.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal of Research in Mathematics Education, 33*(5), 379–405.

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, *90*(3), 174-185.

Lesh, R. Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41–51.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 2-8.

Marton, F. (1981). Phenomenography—describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177-200.

Miyazaki M., Fujita T., & Jones K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223–239.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7–11.

Sémadéni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, *4*(1), 32-34.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Stylianides, A.J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1-20.

van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310–316.