بررسی رفتار دینامیکی پل ها تحت اثر بار متحرک

غلامرضا نوری*، مرتضی طهماسبی؛
دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی

تاریخ: دریافت ۹۴/۸/۱۹ پذیرش ۹۴/۱۲/۱۰

چکیده

افزایش روزافزون سرعت و جرم قطارها و وسایط نقلیه از یک سو و تمایل به ساخت سازه‌های سبک‌تر و در نتیجه افزایش انعطاف‌پذیری سازه‌ها از سوی دیگر باعث می‌شود تا خطاهای ناشی از به‌کارگیری مدل نیروی متحرک در طراحی سازه‌های پل، غیرقابل چشم‌پوشی باشد. در مقالهٔ حاضر، رفتار دینامیکی پل‌ها تحت اثر بار متحرک بررسی شده است. پل به‌صورت تیر اولر–برنولی دو سر مفصل مدل شده است از آن‌جا که در مدل کردن بار متحرک با استفاده از مدل نیروی متحرک از اینرسی جسم متحرک صرف نظر می‌گردد، از این رو، این نوع مدل‌سازی در محدودهٔ بسیار کوچکی از پارامترهای مؤثر (سرعت، جرم) دارای اعتبار است. با لحاظ کردن نیروهای اندرکنشی بین بار متحرک و سازه تکیه‌گاهی، مدل جرم متحرک برای تعیین معادلات دینامیکی حاکم استفاده می‌شود. نتایج مدل‌سازی در این بررسی نشان می‌دهد تغییر مکان دینامیکی وسط دهانهٔ تیر در مدل جرم متحرک با افزایش جرم و سرعت وسیلهٔ نقلیه، نسبت به مدل نیروی متحرک اختلاف چشم‌گیری پیدا می‌کند. به‌طور مثال برای نسبت جرمی (جرم متحرک به جرم کل تیر) برابر ۰/۱۵ و سرعت وسیله نقلیه برابر ۰/۸ سرعت مبنا (که به‌صورت طول تیر تقسیم بر پریود اول تیر تعریف می‌شود)، اختلاف تغییر مکان دینامیکی حداکثر وسط دهانهٔ تیر در دو مدل حدود ۱۱ درصد است.

واژه‌های کلیدی: نیروی متحرک، جرم متحرک، تیر اولر–برنولی، نیروی اینرسی.

* **نویسنده مسئول** r.nouri@khu.ac.ir

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

مقدمه

بررسی رفتار سازه‌ها تحت اثر بار متحرک از چالش‌های پیش‌روی سازه‌های مهندسی طی چنددهه گذشته بوده است. چند نگرش عمده در بررسی مسئله وجود دارد (نیروی متحرک[1]، جرم متحرک[2]، نوسان‌گر متحرک و سیستم متحرک)، مدل بار متحرک که در این مدل از نیروهای اندرکنشی بین سازه تکیه‌گاهی و بار عبوری صرف‌نظر می‌گردد. بررسی رفتار پل‌ها بر اساس این مدل در پژوهش‌های پیشین مشاهده می‌شود [۱]، [۲].

در مدل جرم متحرک، جرم عبوری در نتیجهٔ حرکت بر مسیر تغییر شکل یافته تحت تأثیر نیروهای اینرسی قرار می‌گیرد که سبب به‌وجود آمدن نیروهای تماسی متغیر با زمان بین سازه تکیه‌گاهی و جرم متحرک می‌شود. در مدل نوسان‌گر متحرک وسیلهٔ نقلیه عبوری به شکل سیستم تک درجه آزاد دارای نیروهای میرایی و سختی مدل می‌شود. در مدل سیستم متحرک وسیله نقلیه به شکل سیستم چند درجه آزاد مدل‌سازی می‌شود.

بررسی رفتار سازه‌ها تحت تأثیر هم‌زمان تحریک تکیه‌گاهی ناشی از زلزله و جرم عبوری برای اجتناب از وقوع پدیدهٔ تشدید از دیگر مسائل بررسی شده در این حوزه است. بررسی رفتار پل‌های معلق تحت چنین شرایطی به‌وسیلهٔ فرایبا انجام شده است [۳]. زرفام و همکاران [٤] رفتار دینامیکی تیر با شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت جرم متحرک و تحریک افقی تکیه‌گاهی زلزله را بررسی کردند.

در اکثر پژوهش‌های انجام شده فرض تماس کامل بین جرم متحرک با سازه در استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم وجود دارد. اگر سرعت جرم متحرک عبوری زیاد باشد، احتمال جداشدگی موقت جرم از سازه وجود دارد. به‌ازای مقادیر سرعت زیاد جرم متحرک، به‌هنگام برخورد مجدد، به سازه ضربه وارد می‌شود که سبب تحریک مودهای ارتعاشی بالاتر سازه می‌شود. بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها با فرض جداشدگی جرم از سطح در برخی پژوهش‌های قبلی فرایبا و لی انجام شده است [۵]، [٦].

در مدل‌سازی پل‌ها تحت جرم متحرک می‌توان عرشه را به‌صورت تیر یا صفحه مدل کرد. پژوهش‌های زیادی بر حسب هر دو نوع مدل‌سازی انجام شده است. واثقی و همکاران [۷]

1. Moving force
2. Moving mass

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

رفتار دینامیکی صفحه میندلین تحت تأثیر جرم متحرک را بررسی کرده‌اند. نیکخو و همکاران [۸] مدلی تحلیل-عددی را برای یافتن پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و تیر مرتبهٔ سوم[1] تحت اثر جرم متحرک ارائه کرده‌اند. نیکخو و همکاران [۹] ارتعاش صفحات نازک تحت تأثیر یک مجموعه جرم متحرک را بررسی کرده است.

در مدل جرم متحرک به‌دلیل درگیر بودن معادلات دیفرانسیل حاکم، جواب صریح و تحلیلی برای پاسخ سازه نمی‌توان یافت و باید به‌کمک روش‌های عددی پاسخ سازه را به‌دست آورد. مفید و همکاران [۱۰] روشی نوین به‌نام تحلیل المان گسسته ارائه کرده‌اند که در آن تیر با مجموعه‌ای از میله‌های صلب و فنرهای پیچشی انعطاف‌پذیر مدل می‌شود. نیکخو و همکاران [۱۱] از روش تحلیل رگرسیون برای یافتن پاسخ تیر نازک تحت اثر جرم متحرک استفاده کرده‌اند.

در مدل‌سازی جرم متحرک نیز روی‌کردهای متفاوتی وجود دارد. در مدل جرم متحرک[2] از نیروهای ارتجاعی و میرایی بین جرم متحرک و سازه صرف‌نظر می‌شود. در مدل نوسان‌گر متحرک[3] جرم عبوری با سیستمی تک درجه آزاد مدل می‌شود و نیروی اندرکنش بین جرم متحرک و سازه بر اساس نیروهای ارتجاعی و میرایی نوسان‌گر متحرک به‌دست می‌آید. پسترف و همکاران [۱۲] پاسخ محیط پیوسته الاستیک (فنر، تیر، صفحه) تحت اثر نوسان‌گر متحرک خطی را بررسی کرده‌اند و از روش بسط توابع ویژه برای یافتن پاسخ دینامیکی محیط پیوسته بهره جسته‌اند. موسکولینو و همکاران [۱۳]، اندرکنش جرم متحرک و تیر با مدل نوسان‌گر متحرک با در نظر گرفتن جابه‌جایی قائم نوسان‌گر به‌شکل مطلق و نسبی را بررسی کرده‌اند. هومار و همکاران [۱٤] در پژوهشی پاسخ دینامیکی پل‌ها تحت اثر وسیلهٔ نقلیه بر اساس مدل نوسان‌گر متحرک را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش عرشه پل به شکل دال (صفحه‌ای مستطیلی با رفتار ایزوتروپیک یا اورتوتروپیک) و وسیله نقلیه به‌شکل نوسان‌گر تک درجه آزادی مدل شده است. یانگ و همکاران [۱۵] روش عددی مستقیمی برای یافتن پاسخ محیط الاستیک پارامتر پیوسته تحت اثر جرم متحرک که به شکل نوسان‌گر متحرک مدل‌سازی شده است به‌کار گرفتند و وقوع تشدید در سازه تحت اثر نوسان‌گر متحرک را بررسی کرده‌اند.

1. Reddy-Bickford beam 2. Moving mass 3. Moving oscillator

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

در مدل سیستم متحرک[1] درجات آزادی بیش‌تری برای جرم متحرک در نظر گرفته می‌شود تا مدل‌سازی واقع بینانه‌تری صورت گیرد. مارکسیه‌لو و همکاران [١٦] رفتار دینامیکی پل‌های مستقیم چند دهانه را بر اساس مدل سیستم متحرک چند درجه آزادی بررسی کرده‌اند. چونگ و همکاران [١٧] ارتعاش پل‌های چنددهانه با مقطع غیریک‌نواخت تحت جرم متحرک بر اساس مدل سیستم متحرک چند درجه آزاد را بررسی کردند.

روابط ارتعاش تیر تحت اثر بار متحرک

الف. مدل نیروی متحرک

با به‌کارگیری فرضیهٔ اولر–برنولی برای تیر و وجود نیرویی مساوی وزن جسم متحرکی به جرم m که با موقعیت متغیر $x_0(t)$ بر تیر وارد می‌شود (شکل ۱)، معادلهٔ حاکم بر ارتعاش تیر عبارت است از:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathrm{EI}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,\mathrm{t})\right]+\rho\mathrm{A}(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t)=-mg\delta(x-x_0(t)) \qquad (۱)$$

که EI صلبیت خمشی تیر، ρA وزن واحد طول تیر، $w(x,t)$ معادله تغییر مکان تیر، m جرم بار متحرک و δ تابع دلتای دیراک است که برای تعیین موقعیت بار متحرک روی تیر استفاده می‌شود.

ب. مدل جرم متحرک

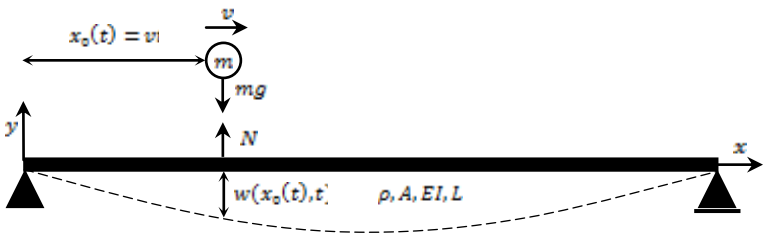
با احتساب شتاب عمودی تیر در زیر جرم متحرک، یعنی $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\left[w(x_0(t),t)\right]$ و وجود نیروی تماسی متغیر با زمان (شکل ۲)، معادله دینامیکی جرم متحرک به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,\mathrm{t})\right]+\rho A(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t)=-m\left[g+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}w(x_0(t),t)\right]\delta(x-x_0(t)) \qquad (۲)$$

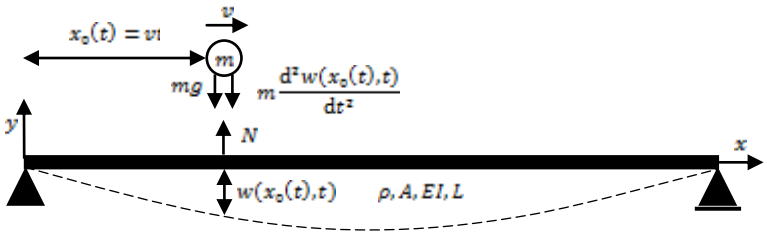
1. Moving system

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]



شکل ۱. مدل نیروی متحرک



شکل ۲. مدل جرم متحرک

ارتعاش آزاد تیر

معادلهٔ دینامیکی حاکم بر تیر اولر–برنولی در حالت ارتعاش آزاد عبارت است از:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (۳)$$

فرض می‌کنیم در مود ارتعاشی j–ام بتوان نوشت:

$$w(x,t)=\varphi_j(x)q_j(t) \qquad (٤)$$

با جای‌گذاری در معادله ارتعاش آزاد تیر داریم:

$$\frac{\varphi_j''''(x)}{\varphi_j(x)}=-\frac{EI}{\rho A}\frac{\ddot{q}_j(t)}{q_j(t)} \qquad (۵)$$

معادلهٔ دیفرانسیل فوق زمانی جواب دارد که دو طرف تساوی برابر مقدار ثابت k باشند. یعنی:

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

$$\frac{\varphi_j''''(x)}{\varphi_j(x)} = -\frac{EI}{\rho A}\frac{\ddot{q}_j(t)}{q_j(t)} = k \qquad (۶)$$

اگر k مثبت باشد با فرض $\mu^2 = -\sqrt{\frac{kEI}{\rho A}}$ داریم:

$$q_j(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t} \qquad (۷)$$

با افزایش t مقدار $q_j(t)$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین به‌ازای مقادیر مثبت k پاسخ‌ها از نظر فیزیکی قابل قبول نیستند. برای یافتن پاسخ به‌ازای مقادیر منفی k فرض می‌کنیم $q_j(t) = e^{i\omega t}$. با جای‌گذاری در معادله ارتعاش آزاد تیر داریم:

$$EI\frac{\partial^4 \varphi_j(x)}{\partial x^4} = \rho A\omega^2 \varphi_j(x) \qquad (۸)$$

با جای‌گذاری $\varphi_j(x) = e^{\mu x}$ در عبارت فوق داریم:

$$EI\,\mu^4 = \rho A\omega^2 \quad \rightarrow \begin{cases} \mu_{1,2} = \pm\lambda \\ \mu_{3,4} = \pm i\lambda \end{cases} \quad ;\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}} \qquad (۹)$$

$$\varphi_j(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 \sin(\lambda x) + C_4 cos(\lambda x) \qquad (۱۰)$$

برای یافتن ضرایب مجهول C_1 تا C_4 باید شرایط مرزی تیر را در معادلهٔ مذکور اعمال کرد. برای تیر دو سر مفصل داریم:

$$\varphi_j(0) = 0\ ;\ \varphi_j(L) = 0\ ;\ \left[\frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2}\right]_{x=0} = 0\ ;\ \left[\frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2}\right]_{x=L} = 0 \qquad (۱۱)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق داریم:

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0,\ C_3 = 1 \qquad (۱۲)$$

بنابراین فرکانس زاویه‌ای و توابع شکل مودی برای تیر دو سر مفصل بدین‌صورت به‌دست می‌آیند:

$$\omega_j = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\ ;\ \varphi_j(x) = sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \qquad (۱۳)$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

ارتعاش واداشته عرضی تیر تحت اثر نیروی متحرک[1]

ساده‌ترین روی‌کرد بررسی دینامیکی مسئله بار متحرک مدل نیروی متحرک است که بار عبوری به‌شکل نیرویی با مقدار ثابت، که همان نیروی گرانشی وسیله نقلیه است در نظر گرفته می‌شود (شکل۱). تعیین پاسخ دینامیکی تیر با استفاده از این مدل به‌ازای مقادیر جرم و سرعت اندک وسیلهٔ نقلیه عبوری معتبر است.

فرضیات به‌کار رفته در استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر تیر در مدل نیروی متحرک عبارتند از:

تیر قبل از ورود وسیله نقلیه تغییر شکل نداده است.

رفتار مصالح ارتجاعی خطی است.

از تغییر شکل‌های برشی و اثرات اینرسی دورانی تیر صرف نظر شده است که نشان می‌دهد نسبت ارتفاع تیر به طول دهانه تیر کوچک است و تئوری تیر اولر-برنولی قابل استفاده است.

طول وسیلهٔ نقلیه در مقایسه با طول تیر کم است، در نتیجه مدل کردن وسیلهٔ نقلیه به شکل تک محوره معتبر است.

نیروهای اینرسی وسیلهٔ نقلیه در مقایسه با وزن وسیله نقلیه کوچک و قابل صرف‌نظر کردن هستند.

در این مدل فرض می شود تیر تحت تحریک ارتعاشی ناشی از عبور باری با مقدار ثابت قرار می گیرد. شرایط مرزی تیر می‌تواند متفاوت باشد. حالت ساده تیر دو سر مفصل بررسی و معادلات آن استخراج می‌شود. معادلهٔ دینامیکی حاکم بر تیر در مدل نیروی متحرک بدین‌صورت است:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=p(x,t) \qquad (۱٤)$$

که EI صلبیت خمشی تیر، ρA وزن واحد طول تیر، $w(x,t)$ معادله تغییر مکان تیر، و $p(x,t)$ معادله بارگذاری دینامیکی دل‌خواه خارجی روی تیر است. اگر بارگذاری خارجی

1. Moving force

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

را ناشی از وزن وسیله نقلیه عبوری در نظر بگیریم معادله دینامیکی حاکم در مدل نیروی متحرک بدین‌شکل خواهد بود:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=-mg\delta(x-vt) \qquad (۱۵)$$

که δ تابع دلتای دیراک است و برای مشخص کردن موقعیت نیروی متحرک در هر لحظه از زمان به‌کار می‌رود و v سرعت وسیلهٔ نقلیه عبوری است که ثابت فرض شده است.

یافتن پاسخ دینامیکی تیر در مدل نیروی متحرک، به‌دلیل درگیر نبودن معادلات دینامیکی حاصل، به‌شکل تحلیلی امکان‌پذیر است. می‌توان از روش‌های گسسته‌سازی مانند روش المان محدود یا روش افراز مودی استفاده کرد و معادلهٔ مذکور را به معادله‌ای با مختصات تعمیم یافته در حوزه زمان تبدیل کرد. در این بررسی با استفاده از روش بسط توابع ویژه متعامد یکه[1] گسسته‌سازی معادلات دینامیکی حاکم انجام شده است. اگر فرض کنیم پاسخ ارتعاشی تیر در مود $j-$ام را بتوان به‌شکل $w(x,t)=\varphi_j(x)q_j(t)$ نوشت، با جای‌گذاری در معادله (۱۵) داریم:

$$EI\varphi_j''''(x)q_j(t)+\rho A\varphi_j(x)\ddot{q}_j(t)=-mg\delta(x-vt) \qquad (۱۶)$$

که بالا نویس (') مشتق نسبت به مختصه x و (.) مشتق نسبت به زمان است. با ضرب طرفین رابطه (۱۶) در $\varphi_i(x)$ و انتگرال‌گیری در کل طول تیر خواهیم داشت:

$$EIq_j(t)\int_0^L\rho A\varphi_j''''(x)\varphi_i(x)dx+\rho A\ddot{q}_j(t)\int_0^L\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx=-mg\int_0^L\delta(x-vt)\varphi_i(x)dx \qquad (۱۷)$$

با به‌کارگیری خاصیت تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_0^L\delta(x-vt)\varphi_i(x)dx=\varphi_i(vt) \qquad (۱۸)$$

توابع شکل $\varphi(x)$ باید متعامد یکه باشند، یعنی:

$$\int_0^L\rho A\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\delta_{ij},\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ;\ i=j\\ 0 & ;\ i\neq j\end{cases} \qquad (۱۹)$$

1. Eigenfunction expansion method

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

اگر معادله (۸) را در معادله ارتعاش دینامیکی تحت نیروی متحرک (معادله ۱۶) جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\omega_j^2 = \frac{EI}{\rho A}\frac{\int_0^L \varphi_j''''(x)\varphi_i(x)dx}{\int_0^L \left[\varphi_j(x)\right]^2 dx} \qquad (۲۰)$$

و معادلهٔ حرکت در مود j−ام به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{-mg\varphi_j(vt)}{\int_0^L \rho A\left[\varphi_j(x)\right]^2 dx} \qquad (۲۱)$$

معادلهٔ (۲۱) معادلهٔ حرکت مود ارتعاشی j−ام در مختصات تعمیم یافته است و تا زمانی که نیروی متحرک در محدوده تیر قرار دارد $(0 \le vt \le L)$ معتبر است. پس از خروج نیروی متحرک از محدوده تیر، تیر با شرایط ارتعاش آزاد به نوسان ادامه خواهد داد. بنابراین پاسخ ارتعاشی کلی تیر بدین‌صورت است:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t)\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \quad x = vt \qquad (۲۲)$$

$q_j(t)$ نیز از حل معادلهٔ ارتعاش در مختصات تعمیم یافته حاصل می‌شود :

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{-2mg}{\rho AL}\sin\left(\bar{\omega}_j t\right) \;\; ; \;\; \bar{\omega}_j = \frac{j\pi v}{L} \qquad (۲۳)$$

که ω_j بسامد زاویه‌ای طبیعی تیر در مود j−ام و $\bar{\omega}_j$ بسامد تحریک ناشی از نیروی متحرک در مود j−ام است. پاسخ معادله دیفرانسیل فوق با فرض شرایط اولیه سکون $q_j(0) = \dot{q}_j(0) = 0$ عبارت است از:

$$q_j(t) = \frac{-2mg}{\rho AL\omega_j^2}\left(\frac{1}{1-\beta_j^2}\right)\left[\sin\left(\bar{\omega}_j t\right) - \beta_j \sin\left(\omega_j t\right)\right] \;\; ; \;\; \beta_j \neq 1$$

$$q_j(t) = \frac{-2mg}{\rho AL\omega_j^2}\left[\frac{\sin\left(\omega_j t\right) - \omega_j t\cos\left(\omega_j t\right)}{2}\right] \; ; \; \beta_j = 1 \qquad (۲۴)$$

$$\beta_j = \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \qquad (۲۵)$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

از معادلهٔ (۲۳) مشخص است که نیروی متحرک یک نوسان هارمونیک در طول تیر ایجاد می‌کند. هم‌چنین اگر داشته باشیم:

$$\omega_j = \frac{j\pi v}{L} ,\left(j = 1, 2, \ldots \right)$$

نیروی متحرک رفتاری مشابه ارتعاش هارمونیک خواهد داشت که فرکانس تحریک آن برابر با یکی از فرکانس های طبیعی تیر است، در این حالت نیروی متحرک تیر را در شرایط تشدید قرار می‌دهد.

کم‌ترین سرعت برای ایجاد تشدید در مدل نیروی متحرک برابر است با $v_{cr} = \frac{L\omega_1}{\pi}$ که سرعت بحرانی نامیده می‌شود.

ارتعاش واداشته عرضی تیر تحت اثر جرم متحرک[1]

در مدل نیروی متحرک از اثرات نیروی اینرسی وسیلهٔ نقلیه با فرض کوچک بودن مقدار آن در برابر وزن وسیلهٔ نقلیه صرف‌نظر شد. حرکت وسیلهٔ نقلیه بر مسیر تغییر شکل یافته تیر سبب ایجاد نیروی اینرسی در وسیلهٔ نقلیه می‌شود (شکل ۲). این نیروی اینرسی تولید نیروی اندرکنش بین وسیلهٔ نقلیه و تیر می‌کند و نیروی وارد بر تیر در هر لحظه از زمان دیگر برابر مقدار ثابت وزن وسیله نخواهد بود. مقدار نیروی اینرسی وسیلهٔ نقلیه تحت تأثیر عواملی مانند سرعت زیاد وسیلهٔ نقلیه، انعطاف‌پذیری تیر، جرم زیاد وسیلهٔ نقلیه، جرم کم تیر، سختی زیاد سیستم تعلیق وسیلهٔ نقلیه و ناهمواری‌ها در طول تیر قرار دارد [۱].

در مدل جرم متحرک با احتساب نیروی ناشی از شتاب عمودی وسیلهٔ نقلیه که از تغییر مکان تیر به‌وجود می‌آید، نیروی وارد بر تیر در طول زمان دیگر مقدار ثابتی نداشته و در هر لحظه از زمان مقدار آن متغیر است. معادله دینامیکی حاکم بر تیر در این حالت عبارت است از:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -m\left[g + \frac{\mathrm{d}^2 w\left(x_0(t),t\right)}{\mathrm{d}t^2} \right]\delta\left(x - x_0(t)\right) \quad (۲۶)$$

1. Moving mass

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

با بسط دادن عبارت $\frac{\mathrm{d}^2 w\left(x_0(t),t\right)}{\mathrm{d}t^2}$ به‌کمک قاعده زنجیره‌ای و با فرض سرعت ثابت $\frac{dx_0(t)}{dt}=v$ خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w\left(x_0(t),t\right)}{\mathrm{d}t^2}=\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right]_{x=x_0(t)}+2v\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x\partial t}\right]_{x=x_0(t)}+v^2\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]_{x=x_0(t)} \quad (۲۷)$$

اجزای نیرویی اضافه شده به نیروی اندرکنش تیر و وسیلهٔ نقلیه در مدل جرم متحرک به‌ترتیب عبارتند از:

$m\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right]_{x=x_0(t)}$ نیروی اینرسی جرم متحرک که در راستای تغییر شکل تیر به آن وارد می‌شود.

$2mv\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x\partial t}\right]_{x=x_0(t)}$ نیروی کوریولیس ناشی از آهنگ تغییرات زمانی شیب تیر.

$mv^2\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]_{x=x_0(t)}$ نیروی گریز از مرکز وارد به جرم متحرک ناشی از انحنای تیر.

به‌کمک روش بسط توابع ویژه، پاسخ دینامیکی تیر تحت جرم متحرک را تعیین می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم در مود ارتعاشی $j-$ام بتوان نوشت $w(x,t)=\varphi_j(x)q_j(t)$. با جای‌گذاری در معادلهٔ (۲۶) خواهیم داشت:

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[\sum q_j(t)\varphi_j(x)\right]+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum q_j(t)\varphi_j(x)\right]=-m\left[g+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum q_j(t)\varphi_j(x_0)\right)\right]\delta(x-x_0) \quad (۲۸)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۸) در رابطه مذکور و مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\sum\rho A\omega_j^2 q_j(t)\varphi_j(x)+\sum\rho A\ddot{q}_j(t)\varphi_j(x)=$$
$$-m\left[g+\sum\ddot{q}_j(t)\varphi_j(x_0)+\sum 2v\dot{q}_j(t)\left[\frac{\partial\varphi_j(x)}{\partial x}\right]_{x=x_0}+\sum v^2 q_j(t)\left[\frac{\partial^2\varphi_j(x)}{\partial x^2}\right]_{x=x_0}\right]\delta(x-x_0) \quad (۲۹)$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

با ضرب طرفین رابطهٔ (۲۹) در $\varphi_i(x)$ و انتگرال‌گیری در طول تیر، با در نظرگرفتن ویژگی متعامد یکه بودن مودها یعنی $\int_L \rho A \varphi_i(x)\varphi_j(x) = \delta_{ij}$ داریم:

$$\sum \omega_j^2 \delta_{ij} q_j(t) + \sum \delta_{ij} \ddot{q}_j(t) = -mg\varphi_i(x_0) - \sum m\varphi_i(x_0)\varphi_j(x_0)\ddot{q}_j(t) - \sum 2mv\varphi_i(x_0)\left[\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}\right]_{x=x_0} \dot{q}_j(t) - \sum mv^2\varphi_i(x_0)\left[\frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2}\right]_{x=x_0} q_j(t) \quad (۳۰)$$

با تعریف عبارات زیر:

$$\mathbf{M} = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n} \quad \mathbf{K} = \left[\omega_j^2 \delta_{ij}\right]_{n\times n} \quad \mathbf{F} = \left[-mg\varphi_i(x_0)\right]_{n\times 1}$$

$$\mathbf{M_L} = \left[m\varphi_i(x_0)\varphi_j(x_0)\right]_{n\times n} \quad \mathbf{C_L} = \left[2mv\varphi_i(x_0)\left(\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0}\right]_{n\times n}$$

$$\mathbf{K_L} = \left[mv^2\varphi_i(x_0)\left(\frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2}\right)_{x=x_0}\right]_{n\times n} \quad \mathbf{T} = \left[q_j(t)\right]_{n\times 1} \quad (۳۱)$$

و در نظر گرفتن n مود ارتعاش برای تیر، معادله دینامیکی حاکم بر تیر تحت اثر جرم متحرک بدین‌شکل درمی‌آید:

$$\left(\mathrm{M}+\mathrm{M_L}\right)\ddot{\mathrm{T}} + \left(\mathrm{C}+\mathrm{C_L}\right)\dot{\mathrm{T}} + \left(\mathrm{K}+\mathrm{K_L}\right)\mathrm{T} = \mathrm{F} \quad (۳۲)$$

از آن‌جا که تیر بدون میرایی فرض شده است داریم: $\mathbf{C} = \left[0\right]_{n\times n}$

در روابط مذکور $\mathbf{M}$ ماتریس جرم تیر، $\mathbf{C}$ ماتریس میرایی و $\mathbf{K}$ ماتریس سختی تیر است. ماتریس‌های $\mathbf{K_L}$، $\mathbf{C_L}$ و $\mathbf{M_L}$ از بسط رابطهٔ نیروی اندرکنش میان تیر و جرم متحرک ناشی می‌شوند و چون به‌ترتیب در ماتریس‌های $\mathbf{T}$، $\dot{\mathbf{T}}$ و $\ddot{\mathbf{T}}$ ضرب می‌شوند به شکل فوق نام‌گذاری شده‌اند تا فرم ماتریسی معادله حرکت به شکل ساده‌ای به‌دست آید.

در مدل جرم متحرک معادلات ارتعاش تیر در مودهای متوالی درگیر[1] هستند. به‌علاوه ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی متغیر زمان هستند و نمی‌توان پاسخ دینامیکی تیر را به شکل تحلیلی و صریح بیان کرد. برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر در این حالت باید از

1. coupled

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

روش‌های عددی[1] مانند روش شتاب ثابت، روش شتاب خطی، روش نیومارک یا روش‌های دیگر با ثابت فرض کردن ماتریس‌های جرم،سختی و میرایی در بازه‌های زمانی کوچک برای حل دستگاه معادلات استفاده کرد.

مدل‌سازی و نتایج

در این بخش پاسخ دینامیکی تیری با مشخصات معلوم در اثر عبور بار متحرک بررسی شده است. پاسخ دینامیکی تیر با هر دو مدل نیروی متحرک و جرم متحرک، بررسی و اثر جرم و سرعت جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی تیر، بررسی شده است. هم‌چنین اهمیت اینرسی جرم متحرک و تعداد مودهای ارتعاشی لازم برای تعیین پاسخ تیر با دقت قابل قبول، در هردو مدل بررسی می‌شود.

مشخصات مسئلهٔ حل شده بدین‌شرح است:

$$L = 20\,m\ ,\ \rho A = 18.8\frac{t}{m},\ EI = 1.4\times10^{7}\ kNm^{2}$$

برای ساده‌سازی پژوهش‌های پارامتریک، سرعت وسیلهٔ نقلیه به شکل ضریبی (α) از سرعت مبنا (u) در نظر گرفته می‌شود که سرعت مبنا به‌صورت $u = L/T_1$ تعریف می‌شود. T_1 پریود مود اول ارتعاشی تیر و L طول تیر است. هم‌چنین جرم وسیلهٔ نقلیه به‌صورت ضریبی (γ) از جرم کل تیر (ρAL) در محاسبات وارد می‌شود.

ابتدا فرض می‌شود تیر به‌طور جداگانه تحت اثر جرم متحرک و بار متحرک قرار گرفته باشد و فقط سه مود اول ارتعاش تیر در نظر گرفته می‌شود. در نمودارهای شکل‌های ۳ تا ٦ ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی که نسبت قدرمطلق تغییر مکان حداکثر وسط دهانهٔ تیر در حالت دینامیکی به حالت استاتیکی است، بر حسب مقادیر مختلف سرعت و جرم بار متحرک، بر اساس دو مدل نیروی متحرک و جرم متحرک رسم شده است.

با بررسی نمودارهای ۳ تا ٦ مشاهده می‌شود به‌ازای جرم مشخص بار متحرک با افزایش سرعت، ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی افزایش می‌یابد. در مدل نیروی متحرک از نیروهای اینرسی بار متحرک صرف نظر می‌شود. چنان‌که از شکل ۳ مشاهده می‌شود به‌ازای مقادیر جرم

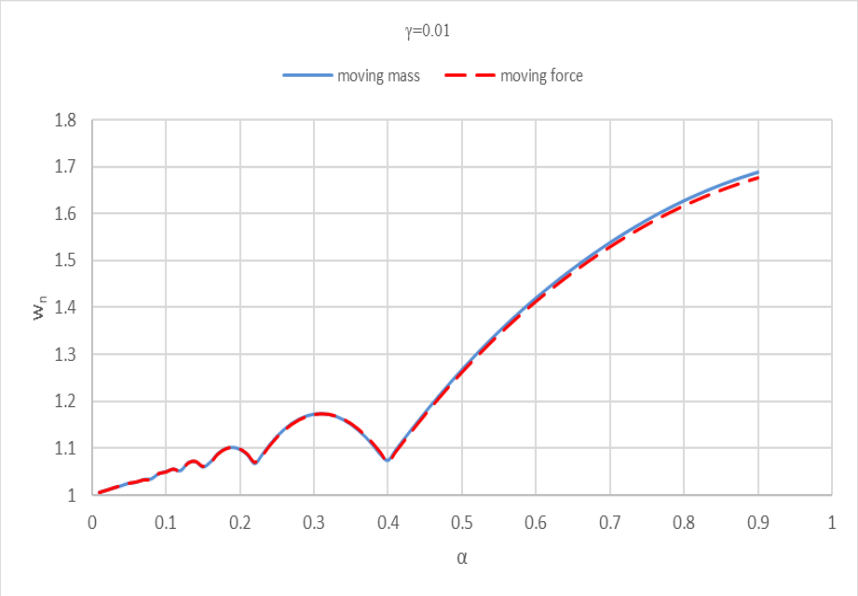
1. Time integration

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

کم، اختلاف بین ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی حاصل از دو مدل نیروی متحرک و جرم متحرک، چشم‌گیر نیست که دلیل آن کوچک بودن مقادیر نیروی اینرسی جرم متحرک است. اما با افزایش جرم بار متحرک، اختلاف میان ضریب بزرگ‌نمایی حاصل از دو مدل، قابل توجه می‌شود و کاستی مدل نیروی متحرک در محاسبهٔ دقیق ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی به‌ازای مقادیر بالای جرم آشکار می‌شود. هم‌چنین مشاهده می‌گردد ضریب بزرگ‌نمایی حاصل از مدل نیروی متحرک، به‌دلیل صرف‌نظر از نیروهای اینرسی بار متحرک، به تغییرات جرم حساسیت نداشته و فقط تغییر سرعت سبب افزایش تغییر مکان وسط دهانه تیر، در این مدل می‌شود.

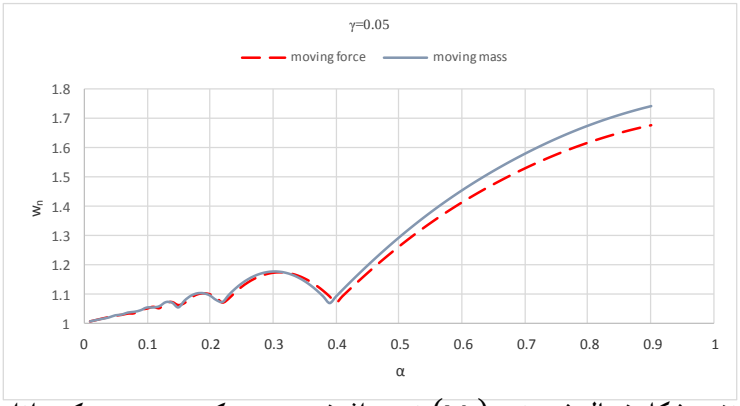
برای بررسی تعداد مودهای کافی برای به‌دست آوردن پاسخ دینامیکی تیر، تیر با مشخصات مذکور و پارامتر سرعت $(\alpha = 0.45)$ به‌ازای مقادیر نسبت جرمی مختلف به‌ترتیب با در نظر گرفتن یک مود ارتعاشی، سه مود ارتعاشی و پنج مود ارتعاشی تحلیل شد. از شکل ۷ مشخص می‌شود با افزایش تعداد مودها از یک به سه مقدار ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی برای مدل نیروی متحرک حدود ۰/۸ درصد و برای مدل جرم متحرک حدود ۱/۱ درصد تغییر می‌کند.



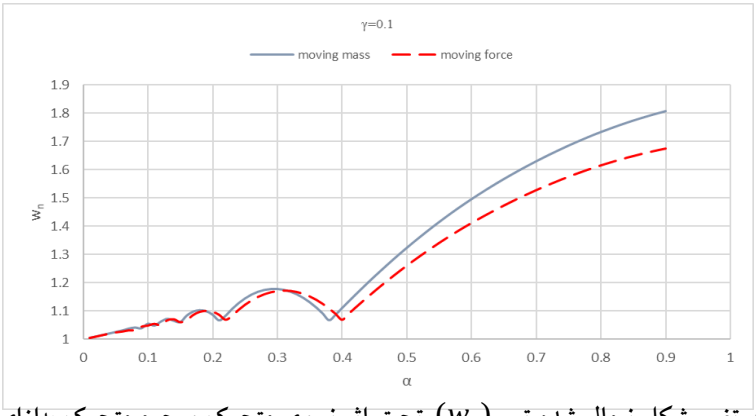
شکل ۳. تغییر شکل نرمال شده تیر (w_n) تحت اثر نیروی متحرک و جرم متحرک به‌ازای نسبت جرمی $(\gamma = 0.01)$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

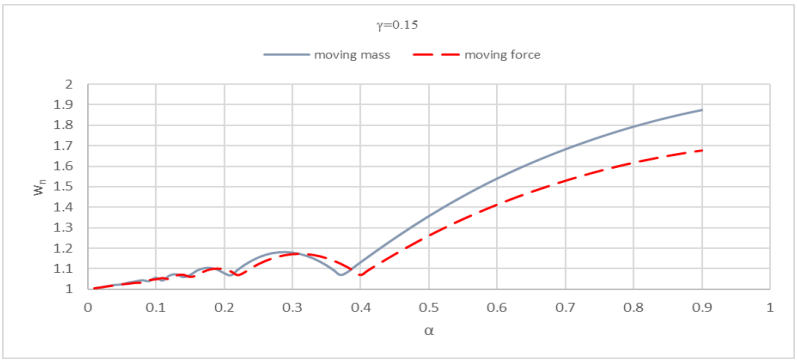
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]



شکل ٤. تغییر شکل نرمال شده تیر (w_n) تحت اثر نیروی متحرک و جرم متحرک به‌ازای نسبت جرمی $(\gamma = 0.05)$

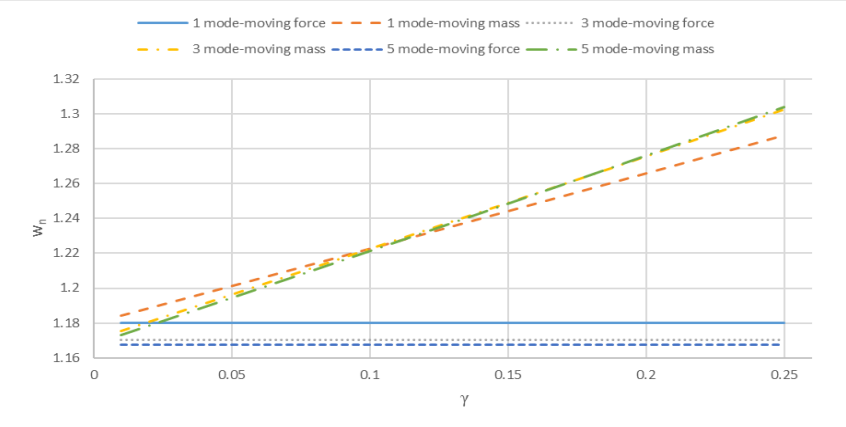


شکل ٥. تغییر شکل نرمال شده تیر (w_n) تحت اثر نیروی متحرک و جرم متحرک به‌ازای نسبت جرمی $(\gamma = 0.1)$



شکل ٦. تغییر شکل نرمال شده تیر (w_n) تحت اثر نیروی متحرک و جرم متحرک به‌ازای نسبت جرمی $(\gamma = 0.15)$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]



شکل ۷. ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی در برابر نسبت جرمی (γ)به‌ازای در نظر گرفتن یک مود ارتعاشی، سه مود ارتعاشی و پنج مود ارتعاشی برای تیر

با افزایش تعداد مودهای ارتعاشی تیر از سه به پنج، ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی برای مدل نیروی متحرک حدود ۰/۲ درصد و برای مدل جرم متحرک حدود ۰/۱ درصد تغییر می‌کند. بنابراین افزایش تعداد مودها به پنج، تلاش محاسباتی را افزایش داده و تأثیر چندانی بر پاسخ دینامیکی تیر ندارد. به‌کارگیری سه مود ارتعاشی برای یافتن پاسخ دینامیکی تیر، بدون از دست دادن دقت محاسباتی کافی به‌نظر می‌رسد. در نهایت به‌ازای نسبت جرمی $\gamma = 0.1$ تاریخچهٔ زمانی تغییر مکان نرمال شده وسط دهانه تیر (w_n) برای نسبت‌های سرعت $\alpha = 0.05$، $\alpha = 0.15$، $\alpha = 0.25$ و $\alpha = 0.4$ به‌ترتیب در شکل‌های ۸ تا ۱۱ نمایش داده شده است.

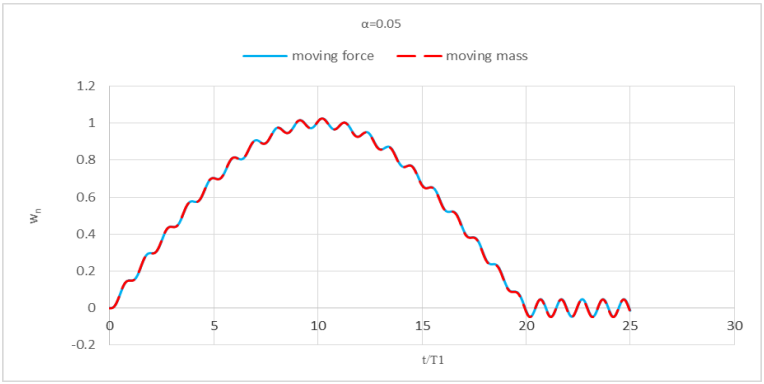
پاسخ دینامیکی تیر از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول مربوط به زمانی است که بار متحرک در محدوده تیر قرار دارد $(0 < \alpha ut < L)$ و در تیر ایجاد ارتعاش واداشته عرضی می‌کند. بخش دوم مربوط به زمانی است که بار متحرک از محدودهٔ تیر خارج شده است و تیر به‌دلیل شرایط اولیه به‌وجود آمده ناشی از عبور بار متحرک پس از خروج از محدودهٔ تیر، با شرایط ارتعاش آزاد نوسان می‌کند. مجدد یادآوری می‌شود که بار متحرک می‌تواند به شکل نیروی متحرک یا جرم متحرک مدل شود.از نمودار شکل ۸ مشخص است به‌ازای سرعت کم

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

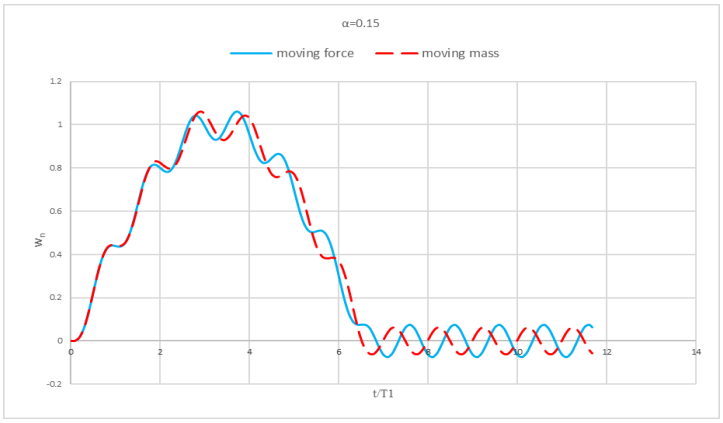
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

بار متحرک $\alpha = 0.05$ پاسخ دینامیکی تیر به‌دست آمده از دو مدل نیروی متحرک و جرم متحرک بر یک‌دیگر منطبق هستند.

از بررسی نمودار شکل‌های ۹ تا ۱۱ مشاهده می‌شود با افزایش جرم بار عبوری (γ) پاسخ دینامیکی تیر افزایش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش نسبت فوق، اختلاف میان پاسخ دینامیکی به‌دست آمده از مدل نیروی متحرک با پاسخ دینامیکی به‌دست آمده از مدل جرم متحرک چشم‌گیر می‌شود. هم‌چنین مشاهده می‌شود به‌ازای یک نسبت جرمی مشخص، با افزایش سرعت بار متحرک، پاسخ دینامیکی تیر افزایش می‌یابد.

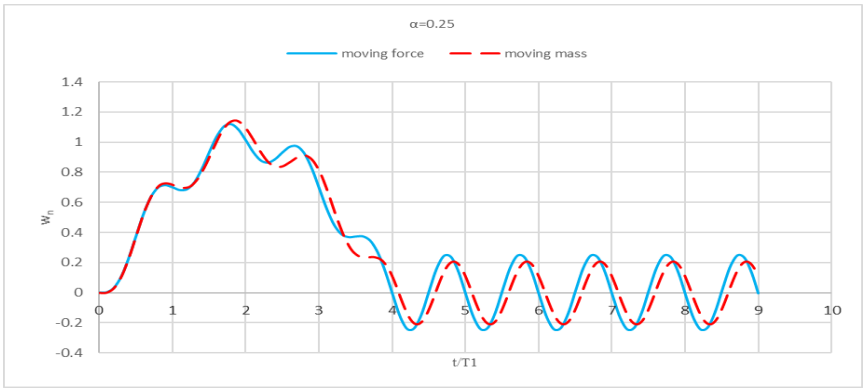


شکل ۸. تاریخچه تغییر مکان دینامیکی وسط دهانه به تغییر مکان استاتیکی نظر به‌ازای پارامتر سرعت $\alpha = 0.05$

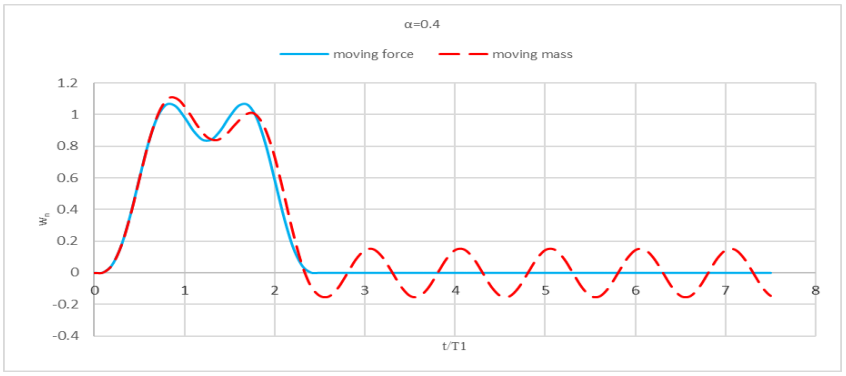


شکل ۹. تاریخچهٔ تغییر مکان دینامیکی وسط دهانه به تغییر مکان استاتیکی نظر به‌ازای پارامتر سرعت $\alpha = 0.15$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]



شکل ۱۰. تاریخچه تغییر مکان وسط دهانه به تغییر مکان استاتیکی نظیر به‌ازای پارامتر سرعت $\alpha = 0.2$



شکل ۱۱. تاریخچه تغییر مکان دینامیکی وسط دهانه به تغییر مکان استاتیکی نظیر به ازای پارامتر سرعت $\alpha = 0.4$

نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله دینامیکی بار متحرک بررسی شده است. در مدل کردن بار متحرک روی‌کردهای متفاوتی وجود دارد، می‌توان بار متحرک را به‌شکل نیرویی ثابت متحرک یا جرم متحرک در نظر گرفت. در مدل نیروی متحرک از اثرات نیروی اینرسی بار متحرک صرف نظر می‌شود، اما در مدل جرم متحرک این نیروها در معادلات دینامیکی حاکم وارد می‌شوند. برخی از عواملی که بر اندازهٔ این نیروی اینرسی تأثیرگذار هستند عبارتند از سرعت زیاد وسیلهٔ نقلیه، انعطاف‌پذیری عرشه پل، جرم زیاد وسیلهٔ نقلیه، جرم کم عرشهٔ پل، سختی زیاد سیستم تعلیق

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

وسیلهٔ نقلیه و ناهمواری زیاد در سطح مسیر. در مدل نیروی متحرک به‌دلیل درگیر نبودن معادلات دینامیکی حاکم می‌توان پاسخ دینامیکی تیر را به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد، اما در مدل جرم متحرک معادلات حاکم با یک‌دیگر درگیر است و باید از روش‌های عددی برای حل معادلات حاکم و یافتن پاسخ دینامیکی تیر استفاده کرد.

در این مقاله با به‌کارگیری دو مدل نیروی متحرک و جرم متحرک پاسخ دینامیکی یک تیر دارای تکیه گاه‌های ساده تحت اثر بار متحرک به‌ازای مقادیر مختلف سرعت و جرم وسیلهٔ نقلیه محاسبه شد. در مدل نیروی متحرک با توجه به صرف‌نظر کردن از نیروهای اینرسی وسیلهٔ نقلیه تأثیر افزایش جرم وسیله بر پاسخ دینامیکی تیر چندان چشم‌گیر نیست اما افزایش سرعت وسیله سبب افزایش جابه‌جایی تیر می‌شود. در مدل جرم متحرک در سرعت‌های کم وسیلهٔ نقلیه تأثیر افزایش جرم وسیله بر پاسخ دینامیکی تیر چندان زیاد نیست اما در سرعت‌های زیاد، افزایش جرم وسیله پاسخ تیر را به شکل چشم‌گیری افزایش می‌دهد که دلیل آن متأثر بودن مقدار نیروهای اندرکنشی تیر و وسیلهٔ نقلیه از جرم و سرعت است.

منابع

1. Olsson M., "On the fundamental moving load problem", Journal of Sound and Vibration, Vol. 145 (1991) 299-307.
2. Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S., "Vehicle-Bridge Interaction Dynamics", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2004).
3. Frýba L., Yau J.D., "Suspended bridges subjected to moving load and support motions due to earthquake", Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, No. 1-2 (2009) 218-227.
4. Zarfam R., Khaloo A.R., Nikkhoo A., "On the response spectrum of Euler-Bernoulli beam with a moving mass and horizontal support

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

excitation ", Journal of Mechanics Research Communication, Vol. 47 (2012) 77-83.

5. Frýba L., "Impacts of two-axle system traversing a beam", International Journal of Solids and Structures, Vol. 2 (1968) 1107-1123.
6. Lee U., "Separation Between the flexible structures and the moving mass sliding on it", Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, No. 5 (1998) 867-877.
7. Vaseghi Amiri, J., Nikkhoo A., Davoodi M.R., Ebrahimzadeh Hassanabadi M., "Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method", Thin-Walled Structures, Vol. 62 (2013) 53-64.
8. Nikkhoo A., Farazandeh A., Ebrahimzadeh Hassanabadi M., "On the computation of moving mass/beam interaction utilizing a semi-analytical method", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, DOI: 10.1007/s40430-014-0277-1 (2014).
9. Nikkhoo A., Ebrahimzadeh Hassanabadi M., Eftekhar Azam S., Vaseghi Amiri J., "Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads", Mechanics Research Communications, Vol. 55 (2014) 105-113.
10. Yavari A., Nouri M., Mofid M., "Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass", Journal of Advances in Engineering Software, Vol. 33 (2002) 143-153.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]

11. Nikkhoo A., Farazandeh A., Ebrahimzadeh Hassanabadi M., Mariani S., "Simplified modeling of beam vibrations induced by a moving mass by regression analysis", Acta Mechanica, Vol. 226, No. 7 (2015) 2147-2157.
12. Pesterev A.V., Bergman L.A., "Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator", ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123 (1997) 878-884.
13. Muscolino G., Palmeri A., Sofi A., "Absolute versus relative formulations of the moving oscillator", International Journal of Solids and Structures, Vol. 46 (2009) 1085-1094.
14. Humar J.L., Kashif A.F., "Dynamic response analysis of slab-type bridges", Journal of Structural Engineering, Vol. 121 (1995) 48-62.
15. Yang B., Tan C.A., Bergman L.A., "Direct numerical procedure for solution of moving oscillator problem", ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 126 (2000) 462-469.
16. Marchesiello S., Fasana A., Garibaldi L., Piombo B.A.D., "Dynamics of multi-span continuous straight bridges subject to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 224 (1999) 541-561.
17. Cheung Y.K., Au F.T.K., Zheng D.Y., Cheng Y.S., "Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains using modified beam vibration functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 228 (1999) 611-628.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.22286837.1395.10.5.7.5]