



Kharazmi University

Journal of Economic Modeling Research

Print ISSN: 2228 - 6454

Online ISSN: 2538 - 4163

Homepage: <https://jemr.khu.ac.ir/>

## Reconstruction of Endogenous Jumps in Financial Markets Using Kramers-Moyal Analytical Method

Hassan Khodavaisi <sup>2\*</sup> Mehdi Salemi<sup>1</sup>

1. Ph.D. Candidate, Faculty of Economics and Management, Department of Economic, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: [m.salemi@urmia.ac.ir](mailto:m.salemi@urmia.ac.ir) (0009-0004-3356-4547)
- 2\*. Corresponding Author, Associate Professor, Faculty of Economics and Management, Department of Economic, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: [h.khodavaisi@urmia.ac.ir](mailto:h.khodavaisi@urmia.ac.ir) (0000-0002-2550-3064)

Article Info	ABSTRACT
<b>Article type:</b> Research Article	Based on stylized facts, price behaviour in financial markets is not simply a continuous process, but rather jumps are observed in asset prices that may be exogenous or endogenous. It is claimed that the source of exogenous jumps is news, and the source of endogenous jumps is internal interactions between the agents. The goal is to extract these endogenous jumps as a function of the state variable and time. For this purpose, the generalized Langevin equation is introduced and it is shown that the size and rate of jumps in this equation can be extracted based on the Kramers-Moyal coefficients. In a practical application of the aforementioned method, Ethereum cryptocurrency price data was used between October 2017 and February 2024 with a sampling rate of one minute. By simulating the extracted dynamics, the probability distribution of the first time passage of price of this asset from a specific level was calculated, and an examination of real price behavior shows that the aforementioned distribution was extracted with good accuracy. Also using the extracted dynamics we show that this model has good out-of-sample prediction for price dynamics between 13April2024 to 13May2024 .
<b>Article history:</b> Received: 29 Oct. 2024	
Received in revised form: 3 Dec. 2024	
Accepted: 30 Dec. 2024	
<b>Keywords:</b> <i>Cryptocurrency Price Dynamics, First time passage, Generalized Langevin equation, Jump-diffusion model.</i>	
<b>JEL:</b> C14, C52, D53, G17	

**Cite this article:** Salemi, Mehdi., Khodavaisi, Hassan (2023). Reconstruction of Endogenous Jumps in Financial Markets Using Kramers-Moyal Analytical Method. *Journal of Economic Modeling Research*, 14 (53), 186-222. DOI: 00000000000000000000



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

DOI: 0000000000000000000000000000

*Journal of Economic Modeling Research*, Vol, 14, No. 53, 2023, pp. 186-222.



Kharazmi University

## بازسازی پرشهای درونزا در بازارهای مالی با استفاده از روش تحلیلی ضرایب کرامرز- مویال

مهدی سالمی<sup>۱</sup> | حسن خداویسی<sup>۲\*</sup>

۱. دانشجوی دکتری، گروه آموزشی اقتصاد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه ارومیه.

رایانامه: [m.salemi@urmia.ac.ir](mailto:m.salemi@urmia.ac.ir) (شناسه اریکید: 0009-0004-3356-4547)

۲. نویسنده مسئول، دانشیار، گروه آموزشی اقتصاد، دانشکده اقتصاد، دانشگاه ارومیه.

رایانامه: [h.khodavaisi@urmia.ac.ir](mailto:h.khodavaisi@urmia.ac.ir) (شناسه اریکید: 0000-0002-2550-3064)

اطلاعات مقاله	چکیده
<b>نوع مقاله:</b> مقاله پژوهشی	بر اساس حقایق آماری، رفتار قیمت در بازارهای مالی یک فرآیند پیوسته نیست، بلکه پرش‌هایی در قیمت دارایی‌ها مشاهده می‌شوند که ممکن است برونزا یا درونزا باشند. ادعا می‌شود که منبع پرش‌های برونزا، اخبار و منبع پرش‌های درونزا، اندرکنش درونی بین عوامل می‌باشد. هدف، استخراج این پرش‌های درونزا به صورت تابعی از متغیر حالت و زمان می‌باشد و برای این منظور معادله لانژون تعمیم یافته معرفی شده و نشان داده می‌شود که اندازه و نرخ پرشها در این معادله بر اساس ضرایب کرامرز-مویال قابل استخراج می‌باشند. در کاربرد عملی روش فوق، از داده‌های قیمتی رمز ارز اتریوم بین اکتبر ۲۰۱۷ تا فوریه ۲۰۲۴ و با نرخ نمونه‌گیری یک دقیقه استفاده شده است. با شبیه‌سازی دینامیک استخراج شده، توزیع احتمال زمان اولین گذر قیمت این دارایی از یک سطح مشخص محاسبه شده و بررسی رفتار واقعی قیمت نشان می‌دهد که توزیع مذکور با دقت خوبی استخراج شده است. همچنین با استفاده از دینامیک استخراج شده نشان می‌دهیم که این مدل، پیش‌بینی خارج از نمونه خوبی برای دینامیک قیمت در بازه ۱۳ آوریل ۲۰۲۴ تا ۱۳ می ۲۰۲۴ دارد.
<b>تاریخ دریافت:</b> ۱۴۰۳/۸/۸	
<b>تاریخ ویرایش:</b> ۱۴۰۳/۹/۱۳	
<b>تاریخ پذیرش:</b> ۱۴۰۳/۱۰/۱۰	
<b>واژه‌های کلیدی:</b> دینامیک قیمت رمز ارز، زمان اولین گذر، مدل پخش- پرش، معادله لانژون تعمیم یافته.	
<b>طبقه‌بندی JEL:</b> C14, C52, D53, G17	

**استناد:** سالمی، مهدی؛ خداویسی، حسن (۱۴۰۲). بازسازی پرشهای درونزا در بازارهای مالی با استفاده از روش تحلیلی

ضرایب کرامرز- مویال. *تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی*، ۱۴ (۵۳)، ۱۸۶-۲۲۲.



DOI: 0000000000000000000000

## ۱. مقدمه

آیا همه پرشهای مشاهده شده در قیمت دارائیه‌ها، منبع خارجی دارند یا برخی از این پرشها براساس مکانیسمهای درونی خود سیستم شکل می‌گیرند؟ این پرسشی است که به عنوان یک مساله باز<sup>۱</sup> توسط کاتلر و همکاران<sup>۲</sup> (۱۹۹۸) مطرح شده است و تاکنون تحقیقات گسترده‌ای برای حل این مساله هم از جانب اقتصاددانان و هم فیزیکدانان علاقه‌مند به حوزه مالی صورت گرفته است. براساس مقاله مذکور، مشاهده پرش در قیمت سهام در حالیکه در زمان وقوع این پرشها، اخبار مرتبطی با سهام منتشر نشده است ایجاب می‌کند که ما به دنبال عواملی غیر از اخبار برای توضیح پرشهای مذکور باشیم. عبارت دیگر، نوسانات بزرگ قیمت صرفاً با تکیه بر تغییرات مشاهده شده در عوامل بنیادی قابل توضیح نمی‌باشند و دامنه این نوسانات بیشتر از آن مقداری است که مدل‌های بنیادی پیش‌بینی می‌کنند و لذا باید دنبال فاکتورهای دیگری غیر از عوامل بنیادی جهت توضیح نوسانات اضافی باشیم.

مساله عدم همخوانی دامنه نوسانات با تغییرات مشاهده شده در عوامل بنیادی توسط جولین و همکاران<sup>۳</sup> (۲۰۰۸) نیز بررسی شده است. براساس نتایج تحقیق مذکور نه اخبار مرتبط با تک سهم و نه اخبار کلان به تنهایی نمی‌توانند فرکانس و دامنه نوسانات مشاهده شده در بازده یک تک سهم را توضیح دهند. براساس نتایج این تحقیق حدود ۹۰ درصد پرشهای بزرگ مشاهده شده در بازارهای مالی از طریق اخبار منتشر شده در بلومبرگ، رویترز و یا سایر منابع اصلی اطلاعات سرمایه‌گذاران قابل توجیه نیستند و در حقیقت فقط حدود ۵ تا ۱۰ درصد پرشهای بزرگتر از ۴۵ براساس اخبار قابل توضیح می‌باشند.

بنابراین مساله ما در این تحقیق شامل دو بخش می‌باشد: ۱- بخش اول که می‌خواهد به این پرسش پاسخ دهد که مکانیسم پشت پرده پرشهای مشاهده شده در قیمت دارائیه‌ها چیست؟ آیا این

<sup>۱</sup> open problem

<sup>۲</sup> Cutler et al. (1988)

<sup>۳</sup> Joulin et al. (2008)

پرشها محرک خارجی دارند یا مکانیسمهایی از درون خود سیستم آنها را بوجود می‌آورد؟ ۲- بخش دوم که باید پرشهای مشاهده شده در داده‌های واقعی را مدلسازی و بازتولید کند.

اگر بر اساس تئوریهای استاندارد موجود در اقتصاد، برونزا بودن پرشها را بپذیریم آنگاه از نظر آماری به یک تناقض آشکار می‌رسیم چرا که از نظر آماری، مشاهدات واقعی وجود دم سنگین در بازه دارائیهها را تأیید می‌کنند (گوپیکریشنان و همکاران<sup>۱</sup>، ۱۹۹۹؛ مالورنگ و همکاران<sup>۲</sup>، ۲۰۰۵). وجود دم سنگین در توزیع داده‌های مربوط به بازه دارائیهها بیانگر این است که نوسانات با دامنه بزرگ، فرکانس بالایی دارند و به صورت پرشمار تکرار شده‌اند لذا اگر نوسانات با دامنه بزرگ را صرفاً ناشی از اخبار بدانیم آنگاه درباره فرکانسها به تناقض می‌رسیم چرا که فرکانس اخبار به مراتب کمتر از فرکانس مشاهده شده در مورد پرش بازده می‌باشد.

دیدگاه استاندارد در اقتصاد، تغییرات قیمت را صرفاً ناشی از شوکهای خارجی می‌داند (فارمر<sup>۳</sup>، ۲۰۱۰). اما در دیدگاه جدید یعنی نظریه سیستمهای پیچیده، دینامیک سیستم بر اساس ترکیب تاثیر رفتار متقابل اجزای سیستم (شوکهای درونزا) و تاثیر میدانهای خارجی (اخبار) بیان می‌شود. اندرکنش داخلی بین عوامل در بازارهای مالی، عمدتاً ناشی از روایات اقتصادی<sup>۴</sup> شکل گرفته در شبکه‌های اجتماعی، رفتارهای گله‌ای<sup>۵</sup> و تقلید از سایر معامله‌گران (شیلر<sup>۶</sup>، ۲۰۱۷) و یا ترس و طمع<sup>۷</sup> معامله‌گران (گرینوود و همکاران<sup>۸</sup>، ۲۰۲۲) می‌باشد که در نهایت به بیش واکنشی یا کم واکنشی<sup>۹</sup> مشاهده شده در بازار می‌انجامد.

هدف از بازسازی فرآیند تصادفی که ما در این تحقیق انجام می‌دهیم، تولید دینامیک قیمت دارایی در بازه زمانی کوتاه مدت بین دو شوک کلان و بازسازی پرشهای درونزایی است که

<sup>۱</sup> Gopikrishnan et al. (1999)

<sup>۲</sup> Malevergne\* et al. (2005)

<sup>۳</sup> Farmer, R. E (2010)

<sup>۴</sup> Economic Narratives

<sup>۵</sup> Herding behavior

<sup>۶</sup> Shiller (2017)

<sup>۷</sup> Fear&Greed

<sup>۸</sup> Greenwood et al. (2022)

<sup>۹</sup> Overreaction or underreaction

براساس شوک‌های خارجی قابل توجیه نیستند. همانطور که در ادامه خواهیم دید مدل‌های پخش-پرش این امکان را به ما می‌دهند که در غیاب اخبار کلان هم، پرش‌های بزرگ و البته درونزا داشته باشیم و این چیزی است که با واقعیت بازارهای مالی بیشتر همخوانی دارد چرا که اگر قرار بود رفتار قیمت در بازارهای مالی براساس فرضیه انتظارات عقلایی شکل بگیرد آنگاه با توجه به ادعای این نظریه-مبنی بر تعدیل سریع قیمت‌ها و شکل‌گیری سریع تعادل جدید پس از بروز شوک- باید قیمت‌ها تا وقوع شوک خارجی بعدی رفتاری اختلالی<sup>۱</sup> (نوساناتی کوچک حول تعادل جدید) از خود نشان می‌دادند. اما کاتلر و همکاران (۱۹۹۸)، جولین و همکاران (۲۰۰۸) و فارمر (۲۰۲۴) نشان می‌دهند که در دنیای واقعی، ما حتی در غیاب اخبار موثر بر سهام نیز شاهد پرش در قیمت دارایی‌ها هستیم. بنابراین با وجود شوک‌های درونزا می‌توان این ایده را مطرح کرد که "بازار خودش اخبار خودش را می‌سازد" بدین معنی که حتی در غیاب اخبار خارجی و در سایه اندرکنش داخلی اجزا، بازار می‌تواند دینامیک غیر اختلالی<sup>۲</sup> داشته باشد.

هدف ما در حالت کلی استخراج رفتار ماکرو سکویی سیستم (و در اینجا قیمت به عنوان رفتار ماکرو سکویی بازار) از روی مشاهدات می‌باشد. منظور از استخراج رفتار ماکرو سکویی این است که برخلاف مدل‌های عامل-پایه<sup>۳</sup> (مثلاً مدل آیزینگ<sup>۴</sup>) که قیمت را به عنوان برآیند رفتار تک تک معامله‌گران در بازار مدل می‌کنند، در اینجا رفتار قیمت بدون توجه به عوامل پشت پرده آن و صرفاً براساس رفتار قبلی خود قیمت (به عنوان متغیر حالت سیستم) مدل‌سازی می‌شود و به نوعی بجای روش مرسوم مدل‌سازی پایین به بالا<sup>۵</sup> در اقتصاد، در این تحقیق ایده مدل‌سازی بالا به پایین<sup>۶</sup> پیاده‌سازی می‌شود. برای این هدف ما مدل پارامتری خاصی را تصریح نمی‌کنیم بلکه در این تحقیق، مدل ما فرم کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی را خواهد داشت و ضرایب این معادله بصورت تحلیلی و براساس ضرایب کرامرز-مویال استخراج خواهد شد. در این تحقیق نشان

<sup>۱</sup> perturbative

<sup>۲</sup> Non-perturbative

<sup>۳</sup> Agent-Based

<sup>۴</sup> Ising

<sup>۵</sup> bottom-up

<sup>۶</sup> top-down

می‌دهیم که دامنه و نرخ پرش به صورت تحلیلی براساس ممانهای بالاتر قابل استخراج می‌باشند. مشارکت دیگر ما در این تحقیق، معرفی کمیت  $Q$  است که براساس ممانهای چهارم و ششم محاسبه می‌شود و به عنوان معیاری عملی جهت انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش می‌باشد. دقت روش معرفی شده در این تحقیق را از طریق بازسازی یک فرآیند معلوم ارزیابی می‌کنیم و همچنین یک کاربرد عملی از روش کرامرز- مویال ارائه می‌دهیم. در یکی از کاربردهای عملی ارائه شده در این تحقیق، اهمیت استخراج دینامیک فرآیند در مقایسه با استخراج توزیع احتمال آن مشهود است. ما با استخراج توزیع احتمال یک فرآیند و سپس نمونه گیری از توزیع استخراج شده، نهایتاً می‌توانیم به سوالاتی که در آنها بحث ترتیب زمانی مهم نیست پاسخ دهیم (مثلاً محاسبه ارزش در معرض خطر در طول دوره مشخص). اما مساله گذار مقدار فرآیند از یک مرز مشخص در یک زمان معین، نمونه‌ای از مسایلی است که اهمیت استخراج دینامیک یک فرآیند تصادفی را نشان می‌دهد چرا که دو فرآیند با توزیع احتمال یکسان، می‌توانند دینامیک متفاوتی داشته باشند به عنوان مثال براساس مطالعه رین و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۱۶) فرآیند ساده Ornstein-Uhlenbeck با ضریب رانش  $-x$  و ضریب پخش یک، دارای توزیع احتمال نرمال  $N(0,1)$  می‌باشد و در عین حال یک فرآیند تصادفی پیچیده با ضریب رانش  $-x^3+x$  و ضریب پخش  $x^2+1$  نیز دارای همین توزیع می‌باشد. یعنی با داشتن توزیع احتمال بازده، می‌توان احتمال یک سطح زیان مشخص را محاسبه کرد ولی برای محاسبه توزیع احتمال زمان وقوع چنین زیانی باید دینامیک فرآیند موجود باشد. با توجه به اینکه در صورت وجود پرش در فرآیند تصادفی، در حالت کلی جواب تحلیلی برای توزیع مذکور استخراج نشده است و تنها برای حالت خاصی که در آن نرخ پرش مقدار ثابتی در نظر گرفته شده است جواب تحلیلی توسط شی<sup>۲</sup> و همکاران (۲۰۱۷) ارائه شده است، لذا رویکرد موجود در این زمینه استخراج توزیع احتمال مذکور از طریق شبیه سازی دینامیک حاکم می‌باشد (تبار<sup>۳</sup>، ۲۰۱۹) و چنین توزیعی برای یک مورد عملی در این تحقیق از طریق شبیه سازی استخراج می‌شود. در حالت کلی و در مباحث مربوط به فرآیندهای تصادفی

<sup>۱</sup> Rinn, et al

<sup>۲</sup> Xu

<sup>۳</sup> Tabar

مساله عبور مقدار فرآیند از یک مرز مشخص و در زمان معین تحت عنوان مساله زمان اولین گذر<sup>۱</sup> شناخته می‌شود و ما در این تحقیق از این مفهوم و ابزار ریاضی موجود در این زمینه جهت مساله محاسبه توزیع احتمال زمان وقوع یک سطح مشخص از زیان یا بازده در فرآیند قیمت دارائیه‌ها استفاده خواهیم کرد.

در ادامه، در بخش دوم مبانی نظری و مرور پیشینه را خواهیم داشت و در بخش سوم ضرایب کرامرز- مویال و ارتباط آنها با ضرایب معادله لانژون ارائه می‌شود. در بخش چهارم استخراج عملی دینامیک فرکانس بالای رمزارز اتریوم را خواهیم داشت و در نهایت بخش پنجم به نتیجه گیری اختصاص یافته است.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه تحقیق

برشهای مشاهده شده در بازه بین دو شوک خارجی در واقع نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمت دارائیه‌ها هستند که براساس تغییر ایجاد شده در ارزش ذاتی آن قابل توجیه نیستند. بعبارت دیگر زمانی که یک شوک برونزا رخ می‌دهد در سایه تغییر عوامل بنیادی و در نتیجه تغییر در جریان‌ات نقدی آتی انتظاری، ارزش ذاتی دارائیه‌ها نیز تغییر می‌کند اما مقدار و فرکانس نوسان قیمتی مشاهده شده در بازار با تغییر برآورد شده در ارزش ذاتی همخوانی ندارد. این مساله در ادبیات مالی به معمای نوسانات اضافی مشهور می‌باشد (شیلر، ۱۹۸۱).

مبانی نظری موجود در توجیه پدیده نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمت دارائیه‌ها، به دو دسته عمده تقسیم بندی می‌شوند:

(۱) دسته اول نظریاتی هستند که برپایه شکل‌گیری هیجان‌ات و بروز بیش واکنشی (یا کم واکنشی) در رفتار عوامل بازار هنگام بروز شوک می‌باشند. از جمله نظریه پردازان مشهور در زمینه مالی رفتاری، رابرت شیلر<sup>۲</sup> از برندگان جایزه نوبل ۲۰۱۳ می‌باشد که روایات اقتصادی<sup>۳</sup> شکل گرفته در رسانه‌ها و فضای مجازی را عامل تحریک عوامل بازار می‌داند (شیلر، ۲۰۱۷). به اعتقاد

<sup>1</sup> First Time Passage Problem

<sup>2</sup> Robert Shiller

<sup>3</sup> Economic Narratives

وی یک نویز خبری کوچک می‌تواند در سایه وجود مکانیسم بازخورد<sup>۱</sup> مثبت در رفتار عوامل بازار، تشدید شده و به یک موج خبری بزرگ و شوک موثر در تشکیل حباب قیمتی تبدیل گردد. تقویت شوکهای کوچک در سایه وجود مکانیسم فیدبک مثبت در رفتار عوامل بازار و تبدیل آنها به حباب و نوسانات بزرگ قیمتی در نظریه دیگری تحت عنوان نظریه بازتاب<sup>۲</sup> توسط جورج سوروس فعال مشهور بازار سرمایه مطرح گردیده است. ایده بازتاب که بیانگر وجود رفتار حلقه‌وار<sup>۳</sup> بین عوامل در بازارهای مالی می‌باشد، با الهام از رفتار اسپینها<sup>۴</sup> در فیزیک آماری و در مدلی با نام LPPL<sup>۵</sup> توسط سورنته<sup>۶</sup> (۲۰۲۲) پیاده سازی شده است که این مدل در حقیقت کاربرد مدل آیزینگ<sup>۷</sup> در حوزه مالی می‌باشد. در دو تحقیق داخلی جداگانه توسط نمکی و حقگو (۲۰۲۱) و عبدالمالکی و همکاران (۱۳۹۴) مدل LPPL در توجیه نوسانات اضافی مشاهده شده در قیمت‌ها در بورس تهران مورد استفاده قرار گرفته است و نتایج نشان می‌دهد مدل مذکور با دقت خوبی قادر به مدلسازی مکانیسم فیدبک مثبت در رفتار عوامل بازار می‌باشد.

۲) دسته دوم نظریاتی هستند که همچنان بر پایه ماکزیمم سازی مطلوبیت نهایی می‌باشند و با متغیر در نظر گرفتن نرخ ریسک گریزی خانوار تحت شوکهای کلان اقتصادی (کمبل و کاکرن<sup>۸</sup>، ۱۹۹۹) و یا افزودن مفهوم ابهام گریزی<sup>۹</sup> (ایژاکیان و بنینگا<sup>۱۰</sup>، ۲۰۱۱) سعی در توجیه نوسانات اضافی دارند. مطالعه این طیف از مدلها نشان می‌دهد که همچنان هدف استخراج معادله اوایلر و در نتیجه استخراج معادله اساسی قیمت گذاری دارائیهای سرمایه‌ای<sup>۱۱</sup> با استفاده از روابط حاصل از بهینه

<sup>۱</sup> Feedback Mechanism

<sup>۲</sup> Reflexivity

<sup>۳</sup> Circular bahavior

<sup>۴</sup> Spin

<sup>۵</sup> Log-Periodic Power-Law

<sup>۶</sup> Sornette

<sup>۷</sup> Ising

<sup>۸</sup> Campbell & Cochrane (1999)

<sup>۹</sup> Ambiguity Aversion

<sup>۱۰</sup> Izhakian and Benninga

<sup>۱۱</sup> براساس کاکرن (۲۰۱۷) معادله اساسی قیمت گذاری دارائیهای سرمایه‌ای به صورت  $E(M_{t+1}R_{t+1}^e) = 1$  می‌باشد که در آن  $R_{t+1}^e = r_{t+1}^e + R_f$  بازده کلی

می‌باشد.  $r_{t+1}^e$  صرف ریسک و  $R_f$  بازده بدون ریسک و  $M_{t+1} = \beta \left( \frac{U'_t c_{t+1}}{U'_t c_t} \right)^{-\gamma}$  می‌باشد.

سازی مصرف خانوار می‌باشد با این تفاوت که در این نوع مدل‌ها تابع مطلوبیت خانوار با نرخ ریسک‌گریزی متغیر با زمان و یا با پارامتر جدید ابهام‌گریزی در نظر گرفته می‌شود تا بتوان در نهایت به مدلی دست یافت که قادر به تولید نوسانات اضافی مشاهده شده در داده‌های واقعی باشد. بررسی مدل‌های ارائه شده بر پایه نظریات فوق‌نشان می‌دهد که هدف عمده این مدل‌ها تولید دامنه غیرعادی و بزرگ نوسانات می‌باشد در حالیکه ما در مشاهدات علاوه بر مشکل دامنه بزرگ نوسانات، مساله وجود پرشهای فرکانس بالا را نیز داریم بطوریکه این نکته در مدل‌های پیشین مورد توجه قرار نگرفته است. اما در این تحقیق به عنوان نوآوری مدلی استخراج می‌شود که قادر است علاوه بر تولید دامنه بزرگ نوسانات، فرکانس بزرگ مشاهده شده در داده‌ها را نیز تولید کند و برای این منظور در کنار متغیر اندازه پرش، متغیر نرخ پرش که بیانگر فرکانس نوسانات بزرگ می‌باشد معرفی و استخراج می‌شود.

مطالعه پیشینه این تحقیق نشان می‌دهد که مدل‌های مختلفی برای بررسی معمای نوسانات اضافی ارائه شده‌اند از جمله مدل‌های مالی رفتاری (شیلر، ۲۰۰۳؛ گرینوود و همکاران، ۲۰۲۲؛ گنایولی و شلیفر<sup>۱</sup>، ۲۰۱۸)، مدل ریسک‌گریزی متغیر با زمان (کاکرن، ۲۰۱۷؛ کمبل و کاکرن<sup>۲</sup>، ۱۹۹۹)، مدل قیمت‌گذاری دارایی واسطه‌ای (هی و کریشنامورتی<sup>۳</sup>، ۲۰۱۸؛ برونرمریر و کریشنامورتی<sup>۴</sup>، ۲۰۲۰، برونرمریر<sup>۵</sup>، ۲۰۲۴)، مدل‌های ابهام‌گریزی (هانسن و سارجنت<sup>۵</sup>، ۲۰۱۹؛ ۲۰۲۲)، مدل حوادث نادر (بارو<sup>۶</sup>، ۲۰۰۹) و مدل‌هایی که بر پایه ارزیابی احتمالی رشد می‌باشند (کیس و همکاران<sup>۷</sup>، ۲۰۱۴؛ شیلر، ۲۰۱۴).

بر اساس داده‌های تاریخی، میانگین بلندمدت صرف ریسک سهام حدود ۷ درصد می‌باشد که عوامل بنیادی قادر به توضیح آن نیستند (شیلر، ۱۹۸۱) و در حقیقت میانگین بلندمدت صرف

<sup>۱</sup> Gennaioli & Shleifer (2018)

<sup>۲</sup> Campbell & Cochrane (1999)

<sup>۳</sup> He & Krishnamurthy (2018)

<sup>۴</sup> Brunnermeier & Krishnamurthy (2020)

<sup>۵</sup> Hansen & Sargent (2019, 2022)

<sup>۶</sup> Barro (2009)

<sup>۷</sup> Case et al. (2014)

ریسک سهام بر اساس عوامل بنیادی حدود ۴ درصد برآورد می‌شود. یکی از مدل‌های ارائه شده برای حل تناقض مشاهده شده بین داده‌های واقعی و نتایج مدلها، مدل ریسک‌گریزی متغیر با زمان (کمبل و کاکرن<sup>۱</sup>، ۱۹۹۹) می‌باشد که بر اساس آن تفاوت بین دو مقدار صرف ریسک سهام تاریخی و صرف ریسک سهام محاسبه شده بر اساس معادله اولر (مساله بهینه‌سازی مصرف خانوار)، به تفاوت نرخ ریسک‌گریزی در دوران رونق و رکود برمی‌گردد. بدین معنی که در دوران رونق، ریسک‌گریزی خانوار نسبت به دوران رکود کمتر است و همین امر باعث می‌شود خانوار در دوران رونق، بازده مورد انتظار کمتری از داراییهای ریسکی داشته باشند و در نتیجه در این دوران تقاضای داراییهای ریسکی افزایش یافته و بالطبع قیمت آنها افزایش می‌یابد و در کل این مکانیسم باعث می‌شود صرف ریسک سهام بیشتر از آنچه بر اساس رشد مصرف قابل توضیح است باشد. راه حل دیگری که اخیراً برای حل این معما مطرح شده است مدل قیمت‌گذاری دارایی واسطه‌ای<sup>۲</sup> می‌باشد و در این نوع مدلها ادعا می‌شود که ظرفیت ریسک‌پذیری<sup>۳</sup> واسطه‌های مالی وابسته به امکان و فرصت اهرم مالی<sup>۴</sup> توسط آنها بوده و لذا تغییرات ظرفیت ریسک‌پذیری<sup>۵</sup> واسطه‌های مالی در سایه تغییر فرصتهای اهرم مالی، باعث نوسان قیمت داراییها می‌شود (کاکرن، ۲۰۱۷؛ هی و کریشنامورتی، ۲۰۱۸).

همچنین مدل‌هایی نیز بر اساس مفهوم ابهام‌گریزی برای حل معمای نوسانات اضافی ارائه شده‌اند و بر اساس این دیدگاه افزایش میزان ابهام و عدم قطعیت در مورد بازده مورد انتظار یک دارایی باعث کاهش قیمت آن می‌شود. همانطوریکه با افزایش ریسک‌گریزی افراد، بازده مورد انتظار دارایی ریسکی افزایش و در نتیجه قیمت جاری آن کاهش می‌یابد، ادعا می‌شود ابهام‌گریزی نیز می‌تواند اثری مشابه روی قیمت دارایی داشته باشد. بدین معنی که اگر ابهام موجود در مورد بازده مورد انتظار یک دارایی افزایش یابد آنگاه سرمایه‌گذار همزمان با صرف ریسک، صرف ابهام نیز

<sup>۱</sup> Campbell & Cochrane

<sup>۲</sup> Intermediary Asset Pricing

<sup>۳</sup> risk-bearing capacity

<sup>۴</sup> fortunes of leverage

<sup>۵</sup> risk-bearing capacity

طلب می‌کند و لذا جهت جبران این ابهام، قیمت دارایی کاهش بیشتری نسبت به حالتی که فقط اثر ریسک‌گریزی وجود دارد، خواهد داشت (ایژاکیان و بنینگا، ۲۰۱۱).

در کنار مدل‌هایی که اقتصاددانان جهت بررسی نوسانات اضافی در بازارهای مالی ارائه داده‌اند، محققانی از حوزه فیزیک و سیستم‌های پیچیده نیز با وارد کردن مفهوم شوک‌های درونزا به مساله، مدل‌هایی را در توجیه این پدیده ارائه کرده‌اند که بیشتر به مدل پخش-پرش مورد بررسی در این تحقیق نزدیک هستند و لذا در ادامه به چند مورد از آنها اشاره می‌کنیم.

هالپرین<sup>۱</sup> (۲۰۲۲) تحقیقی را در مورد رفتار قیمت در بازارهای مالی بر اساس شبیه‌سازی معادله لانژون انجام داده است و لذا به جهت مدل مورد استفاده به تحقیق ما نزدیکتر می‌باشد با این تفاوت که در تحقیق مذکور، معادله لانژون بدون در نظر گرفتن جمله پرش استخراج شده است. در تحقیق مذکور تابع پتانسیل محدود کننده رفتار سیستم، یک چند جمله‌ای درجه چهار در نظر گرفته شده است و لذا ضریب رانش معادله لانژون یک چند جمله‌ای درجه سه خواهد بود (ضریب رانش برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌باشد). در تحقیق اشاره شده، پس از اعمال فروضی روی فرم تبعی تابع پتانسیل و کالیبراسیون ضرایب معادله لانژون، از مدل حاصل برای پیش‌بینی قیمت اختیار معامله استفاده شده است. در مقایسه با تحقیق مذکور، وقتیکه از روش کرامرز-مویال استفاده می‌کنیم دیگر نیازی به اعمال قید روی تابع پتانسیل و تصریح فرم خاصی برای آن نداریم چرا که قادر هستیم شکل دقیق آن را از روی داده‌ها استخراج کنیم.

در تحقیقی که توسط مارساسویولی و همکاران<sup>۲</sup> (۲۰۲۲) با بررسی اخبار ویژه سهام در بازه پنج ساله روی ۳۰۰ سهم انجام گرفته است، ادعا می‌شود که خواص پرش‌های برونزایی که موقع انتشار اخبار مرتبط با سهام مشاهده می‌شود با پرش‌های درونزایی که در غیاب اخبار ویژه سهام مشاهده می‌شوند تفاوت دارد بطوریکه پرش‌های برونزایی ناگهانی می‌باشند-که با توجه به تصادفی بودن منبع آنها یعنی اخبار، قابل قبول است- ولی ویژگی پرش‌های درونزایی این است که متعاقب یک رشد شتابدار در نوسانات می‌باشند و همچنین متاثر از حافظه سیستم و قابل پیش‌بینی هستند.

<sup>۱</sup> Halperin (2022)

<sup>۲</sup> Marcaccioli et al. (2022)

در دو تحقیق جداگانه فوست و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۲۰) و ورلی و سورنته<sup>۲</sup> (۲۰۲۲) درباره پرشهای درونزا، بروز این نوع پرشها بر پایه وجود حلقه بازخورد<sup>۳</sup> مثبت و تقویت نیز در رفتار عاملهای بازار توجیه می‌شوند. نتایج تحقیقهای مذکور نشان می‌دهند که یک شوک خارجی کوچک در بلند مدت با ضریب ۵ در بازار سهام (فوست و همکاران، ۲۰۲۰؛ ورلی و سورنته، ۲۰۲۲) و با ضریب ۲ (ورلی و سورنته، ۲۰۲۲) در بازار ارزهای خارجی تحت تاثیر شوکهای داخلی تقویت می‌شود. چنین نتیجه‌ای با روشی متفاوت از تحقیقات مذکور و با استفاده از متغیرهای ابزاری و تحت فرضیه بازارهای بی کشش<sup>۴</sup> بررسی و تأیید شده است (گابیکس و کویجن<sup>۵</sup>، ۲۰۲۱). براساس فرضیه بازارهای بی کشش، اگر در اثر شوک خارجی یک درصد ورود سرمایه به بازار سهام افزایش یابد آنگاه در افق یکساله ما شاهد افزایش پنج درصدی در ارزش کل بازار سهام خواهیم بود.

حال براساس آنچه گفته شد مدل پخش- پرش معرفی می‌شود. با توجه به نتایج تحقیقات مذکور و پذیرش وجود مکانیسم بازخورد مثبت ضعیف و قوی در فازهای مختلف بازار، می‌توان نو سانات قیمت را شامل دو جزء پخش و پرش دانست بطوریکه جزء پخش بیانگر نو ساناتی است که به علت مکانیسم بازخورد مثبت ضعیف شکل می‌گیرند ولی پرشهای درونزا به علت وجود بازخورد مثبت قوی در رفتار عاملها شکل می‌گیرند. یک مدل پایه برای مدلسازی پرشها در بازارهای مالی، مدل پخش- پرش مرتون<sup>۶</sup> (۱۹۷۶) می‌باشد که در حقیقت تعمیمی از معادله بلک- شولز و به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq \quad \text{رابطه (۱)}$$

در رابطه ۱،  $\alpha$  بازده مورد انتظار،  $\sigma^2$  واریانس بازده،  $Z$  فرآیند وینر،  $q$  فرآیند پواسون و  $\lambda$  میانگین رسیدن پرشها در واحد زمان می‌باشد. برخلاف مدل مرتون که در آن فرم ضرایب به

<sup>۱</sup> Fosset et al. (2020)

<sup>۲</sup> Wehrli & Sornette (2022)

<sup>۳</sup> Feedback Loop

<sup>۴</sup> Inelastic Markets Hypothesis

<sup>۵</sup> Gabaix & Koijen (2021)

<sup>۶</sup> Merton (1976)

صورت پیش فرض و خطی در نظر گرفته شده است، در این تحقیق ما می‌خواهیم این ضرایب را بدون هیچ پیش فرضی در مورد فرم آنها و به صورت داده-محور استخراج کنیم.

از آنجائیکه مدل پخش-پرش مرتون حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته<sup>۱</sup> می‌باشد لذا بررسی مدل مذکور در حالت کلی و بدون هیچ پیش فرض اضافی در مورد فرم ضرایب آن، معادل بررسی معادله لانژون تعمیم یافته خواهد بود و خوشبختانه معادله لانژون پایه و تعمیم یافته آن در حوزه فیزیک بطور مفصل و حتی در ابعاد بالاتر کنکاش شده (تبار<sup>۲</sup> و همکاران، ۲۰۲۴؛ انوری<sup>۳</sup> و همکاران، ۲۰۱۶؛ گاردینر<sup>۴</sup>، ۱۹۸۵؛ ریسکن<sup>۵</sup>، ۱۹۹۶؛ تبار، ۲۰۱۹) و نحوه استخراج ضرایب رانش و پخش و همچنین اندازه و نرخ پرش در معادله لانژون تعمیم یافته با روشهای مختلف بررسی شده است و نتایج تحقیق نیک اختر<sup>۶</sup> و همکاران (۲۰۲۳) نشان می‌دهد که در بین روشهای کرامرز-مویال، کرنل، ماکزیمم در ست نمایی و هیستوگرام جهت استخراج ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته، روش کرامرز-مویال نسبت به سایر روشهای مذکور برتری دارد و این برتری مخصوصاً زمانی که حجم نمونه کم باشد بارزتر است. بنابراین عمده هدف ما در این تحقیق، کاربرد نتایج تحقیقات حوزه فیزیک در مالی و حذف شکاف بین ابزار مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی در فیزیک و مالی می‌باشد.

### ۳. مدل تحقیق و روش برآورد

همانطور که در مقدمه بیان شد مدل مورد استفاده در این تحقیق، مدل پخش-پرش می‌باشد و لذا در این بخش ابتدا روش برآورد ضرایب مدل پخش را براساس ضرایب کرامرز-مویال بیان می‌کنیم و سپس نتایج را به مدل پخش-پرش تعمیم می‌دهیم و اثر وجود پرش را روی ضرایب رانش و پخش بررسی می‌کنیم و همچنین روشی عملی برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش-

<sup>۱</sup> Generalized Langevin Equation

<sup>۲</sup> Tabar

<sup>۳</sup> Anvari

<sup>۴</sup> Gardiner (1985)

<sup>۵</sup> Risken & Risken (1996)

<sup>۶</sup> Nikakhtar

پرش ارائه می‌دهیم. ادعا می‌شود تخمین ضرایب مدل پخش-پرش به روش کرامرز-مویال نتایج بهتری نسبت به سایر روشهای تخمین از جمله روش کرنل دارد (نیک اختر و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۲۳). در مقایسه روش ناپارامتری ما با روش های پارامتری مثل مدل های مارکوف پنهان، مدل های شاخه‌ای<sup>۲</sup>، می‌توان گفت که در مدل های پارامتری مذکور، یک توزیع پیش فرض با پارامترهای مجهول برای حالت پنهان سیستم و همچنین یک توزیع پیش فرض برای فرآیند ثانویه که بر روی حالت پنهان سوار می‌شود در نظر گرفته شده می‌شود. برای مثال، در مدل های مارکوف پنهان (زوکینی و مک دونالد<sup>۳</sup>، ۲۰۰۹)، یک توزیع برنولی برای حالت پنهان و یک توزیع نرمال برای فرآیند ثانویه در نظر گرفته می‌شود و پارامترهای این مدل معمولاً به روش حداکثر درست نمایی تخمین زده می‌شود. اما تخمین پارامترهای مدل مارکوف پنهان با فرض توزیع‌هایی غیر از توزیع برنولی و نرمال، نیازمند کار محاسباتی سنگینی است بطوریکه اگر بخواهیم جهش‌های مشاهده شده در داده‌ها را با این مدل‌ها تولید کنیم، مشکل تخمین بیزی پارامترها بازم پیچیده‌تر می‌شود در حالیکه در روش ناپارامتری ما، تمام تخمین‌ها فقط بر اساس محاسبه ممان‌های شرطی می‌باشد و لذا محاسبات سبک‌تر و سرراست است.

### ۳-۱- برآورد ضرایب مدل پخش و مدل پخش-پرش

مجهولات ما در مدل پخش-پرش، در واقع پارامترهای یک معادله دیفرانسیل تصادفی می‌باشند که این معادله در مکانیک آماری با نام معادله لانژون تعمیم یافته شناخته می‌شود. ادعا می‌کنیم پارامترهای این معادله براساس ضرایب معادله کرامرز-مویال قابل استخراج می‌باشد. معادله کرامرز-مویال یک PDE<sup>۴</sup> می‌باشد که توزیع احتمال فرآیندهای مارکوف را توصیف می‌کند. این PDE یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول در زمان و مرتبه بی‌نهایت در متغیر حالت

<sup>۱</sup> Nikakhtar et al. (2023)

<sup>۲</sup> branching models

<sup>۳</sup> Zucchini & MacDonald

<sup>۴</sup> Partial differential equation

سیستم می‌باشد. مراحل استخراج این معادله با جزئیات در مراجع (گاردینر<sup>۱</sup>، ۱۹۸۵؛ ریسکن و ریسکن<sup>۲</sup>، ۱۹۹۶؛ تبار<sup>۳</sup>، ۲۰۱۹) آمده است. فرم کلی این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\delta P(x, t)}{\delta t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\delta}{\delta x}\right)^n [D^n(x, t)P(x, t)] \quad \text{رابطه ۲}$$

مقادیر  $D^n(x, t)$  در رابطه ۲ را ضرایب کرامرز-مویال می‌نامند. با توجه به رابطه ۲، ضرایب کرامرز-مویال در حالت کلی ضرایب یک سری نامحدود می‌باشند که تحول زمانی مرتبه اول احتمال حالت سیستم  $\left(\frac{\partial P(x, t)}{\partial t}\right)$  را بر حسب تحول مکانی مراتب بالاتر احتمال حالت سیستم  $\left(\frac{\partial^n P(x, t)}{\partial x^n}\right)$  نمایش می‌دهند. با توجه به رابطه ۳ در زیر، ضرایب کرامرز-مویال بر حسب همانهای شرطی قابل محاسبه هستند:

$$D^n(x, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{M^{(n)}(x, t, \tau)}{\tau} \quad \text{رابطه ۳}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [x(t + \tau) - x(t)]^n \rangle_{|x(t)=x'}$$

### ۳-۲- قضیه پائولا

با توجه به نامحدود بودن سری موجود در رابطه ۲، عملاً نمی‌توان این PDE را حل کرد. لذا به نظر می‌رسد باید دنبال حالات خاصی از این معادله باشیم که ما را به یک سری محدود و در نتیجه یک معادله قابل حل می‌رساند. قضیه پائولا بیان می‌کند که در کل فقط سه حالت ممکن برای معادله کرامرز-مویال وجود دارد (پائولا<sup>۴</sup>، ۱۹۶۷):

۱-  $n=1$ : سری ضرایب در جمله اول قطع می‌شود.

۲-  $n=2$ : سری ضرایب در جمله دوم قطع می‌شود.

۳-  $n=\infty$ : سری ضرایب قطع نمی‌شود.

<sup>۱</sup> Gardiner (1985)

<sup>۲</sup> Risken & Risken (1996)

<sup>۳</sup> Tabar (2019)

<sup>۴</sup> Pawula (1967)

خلاصه قضیه پائولا بدین صورت است که اگر فرض  $D^2 = 0$  را بپذیریم آنگاه سری در همان جمله اول قطع می شود و این به معنی تعیینی بودن سیستم می باشد. اگر  $D^2 \neq 0$  و  $D^4 = 0$  را بپذیریم آنگاه سری حداکثر دو جمله خواهد داشت و فرآیند تصادفی، پیوسته و پخشی می باشد. اگر  $D^4 \neq 0$  باشد آنگاه سری قطع نخواهد شد و لذا فرآیند ناپیوسته بوده و علاوه بر پخش دارای پرش نیز می باشد.

### ۳-۳- معادله لانژون و ارتباط آن با معادله فوکر-پلانک

معادله کرامرز- مویال در حالت خاص  $D^2 \neq 0$  و  $D^4 = 0$  به معادله فوکر- پلانک تبدیل می شود:

$$\frac{\delta P(x, t)}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta x} (D^1(x, t)P(x, t)) + \frac{\delta^2}{\delta^2 x} (D^2(x, t)P(x, t)) \quad \text{رابطه (۴)}$$

و همچنین فرم کلی معادله لانژون به صورت زیر می باشد:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\eta(t) \quad \text{رابطه (۵)}$$

که در آن  $\alpha(x, t)$  را جمله رانش و  $\beta(x, t)$  را ضریب پخش می نامند و  $\eta(t)$  یک نویز سفید با میانگین صفر و تابع همبستگی دلتای دیراک می باشد. فرآیند وینر حالت خاصی از معادله لانژون می باشد که با انتخاب مقادیر  $\alpha(x, t) = 0$ ،  $\beta(x, t) = 1$  و  $x(t) = W(t)$  بدست می آید:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta(t) \quad \text{رابطه (۶)}$$

بدین ترتیب معادله لانژون را می توان برحسب فرآیند وینر به فرم زیر نوشت:

$$dx(t) = \alpha(x, t)dt + \beta(x, t)dW(t) \quad \text{رابطه (۷)}$$

حال ارتباط معادله لانژون با معادله فوکر-پلانک را با این گزاره بیان می کنیم: "اگر دینامیک یک فرآیند تصادفی از معادله لانژون پیروی کند آنگاه تابع توزیع احتمال چنین فرآیندی در معادله

فوکر-پلانک صدق می‌کند". اثبات این گزاره و ارتباط بین ضرایب معادله فوکر-پلانک و ضرایب معادله لانژون که به صورت زیر می‌باشد، در (تبار، ۲۰۱۹) آمده است:

$$D^1(x, t) = \alpha(x, t) \quad \text{رابطه ۸}$$

$$D^2(x, t) = \frac{1}{2}\beta^2(x, t) \Rightarrow \beta(x, t) = \sqrt{2D^2(x, t)} \quad \text{رابطه ۹}$$

روابط ۸ و ۹ بیان می‌کنند که برای استخراج ضرایب معادله لانژون، نیاز به ضرایب معادله فوکر-پلانک می‌باشد که آن هم از روی ممان‌های شرطی قابل محاسبه می‌باشد.

### ۳-۴- مدل پخش - پرش یا معادله لانژون تعمیم یافته

علت بررسی معادله لانژون و تعمیم یافته آن در این تحقیق این است که اکثر مدل‌های موجود در مباحث مالی، حالت خاصی از معادله لانژون می‌باشند از جمله معادله بلک-شولز برای بررسی دینامیک قیمت سهام، معادله CIR (Cox-Ingersoll-Ross) برای بررسی دینامیک نرخ بهره و مدل هستون برای بررسی نوسانات در بازارهای مالی. مدل‌های پخش-پرش نیز که امروزه با پیش فرضهای متنوع در مورد ضرایب آن جهت مدل‌سازی قیمت مورد استفاده قرار می‌گیرند در حقیقت حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته می‌باشند که علاوه بر فرآیند وینر شامل فرآیند پواسون نیز می‌باشد. خود معادله لانژون بر اساس معیار پیوستگی لیندبرگ<sup>۱</sup> (تبار، ۲۰۱۹) یک مدل پیوسته به حساب می‌آید اما بر اساس معیار مذکور معادله لانژون تعمیم یافته یک مدل ناپیوسته می‌باشد و لذا گزینه مناسبی برای مدل‌سازی فرآیندهای پخش-پرش می‌باشد.

با الهام از مدل مرتون (۱۹۷۶) که در بخش قبل به آن اشاره شد، مدل پخش-پرشی که ما در این تحقیق بررسی خواهیم کرد به فرم معادله لانژون تعمیم یافته زیر می‌باشد (انوری و همکاران<sup>۲</sup>، ۲۰۱۶):

$$dx(t) = \alpha(x, t)dt + \beta(x, t)dW(t) + \xi dJ(t) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

<sup>۱</sup> Lindeberg continuity condition

<sup>۲</sup> Anvari et al., 2016

جمله  $dJ(t)$  در رابطه ۱۰، تفاوت بین معادله لانژون و لانژون تعمیم یافته می باشد و جهت نمایش پرشها آورده شده است.  $J(t)$  فرآیند پواسون با نرخ پرش  $\lambda(x,t)$  و متغیر تصادفی  $\xi$  بیانگر اندازه پرشها با توزیع نرمال  $N(0, \sigma_\xi^2)$  هست و  $\sigma_\xi^2$  دامنه پرش می باشد. از نظر مفاهیم مالی، استخراج دامنه و نرخ پرش بزرگ برای یک فرآیند مالی معادل وجود دم سنگین در توزیع آن و عبارتی معادل احتمال بالای زیانهای بزرگ می باشد.

ضریب رانش بیانگر میانگین تغییرات بازده در بازه کوتاه مدت بین دو شوک برونزا می باشد. ضریب پخش نشان دهنده شدت نوسانات نرمال یا نوسانات بازده در بازه ای از تحول زمانی فرآیند می باشد که فیدبک مثبت ضعیف بر رفتار عوامل بازار حاکم است. در مقابل اما اندازه پرش مربوط به تغییرات غیرنرمال فرآیند یا تغییرات در زمان اتفاق پواسونی می باشد که در اینجا اتفاق پواسونی، پدیده قفل شدن نقدشوندگی بازار (عدم توانایی خرید و فروش سریع یک دارایی بدون تغییر قیمت آن) می باشد.

اثر بازار به صورت متوسط تغییر قیمت یک دارایی از زمان شروع تا پایان یک معامله بزرگ تعریف می شود و براساس نظریه نقدشوندگی پنهان<sup>۱</sup> (بوشود و همکاران<sup>۲</sup>، ۲۰۱۸)، قفل شدن نقدشوندگی بازار پس از انجام یک معامله بزرگ، باعث ایجاد اثر بازار بزرگ می شود. لذا با توجه به تعریف اثر بازار، اندازه پرش در معادله لانژون تعمیم یافته یک گزینه خوب برای کمی سازی آن می باشد.

حال می خواهیم ببینیم که آیا با وجود پرش در فرآیند، ضرایب رانش و پخش همان مقادیر قبلی که در معادله لانژون پایه استخراج شده اند می باشد یا اینکه وجود پرش باعث تغییر این ضرایب می شود؟

پارامترهای مدل پخش - پرش براساس ممانهای اول، دوم، چهارم و ششم به صورت زیر استخراج می شوند (گاردینر، ۱۹۸۵؛ ریسکن و ریسکن، ۱۹۹۶؛ تبار، ۲۰۱۹):

<sup>۱</sup> Latent Liquidity Theory

<sup>۲</sup> Bouchaud et al. (2018)

$$\alpha(x, t) = \frac{M^1(x, t)}{\tau} = D^1(x, t) \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$\beta(x, t) = \sqrt{\frac{M^2(x, t)}{\tau} - \frac{(M^4(x, t))^2}{3M^6(x, t)}} \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

$$= \sqrt{2D^2(x, t) - \lambda(x, t)\sigma_{\xi}^2(x, t)}$$

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{M^{(f)}(x, t)}{5M^{(f)}(x, t)} \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

$$\lambda(x, t) = \frac{M^{(f)}(x, t)}{3\sigma_{\xi}^4} \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

با توجه روابط ۱۱ و ۱۲ در صورت وجود پرش در فرآیند، ضریب رانش باز هم برابر ضریب اول کرامرز- مویال می‌باشد، اما ضریب پخش کمتر از مقدار آن در فرآیند پخش محض می‌باشد.

### ۳-۵- معیاری عملی برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش

برای انتخاب بین مدل پخش و مدل پخش- پرش، براساس تئوری به قضیه پائولا مراجعه می‌شود و ادعا می‌شود که اگر ضریب چهارم کرامرز- مویال صفر شود آنگاه ضرایب کرامرز- مویال بالاتر از مرتبه دوم وجود نخواهد داشت و لذا دینامیک فرآیند به صورت یک معادله پخش خواهد بود و در غیر این صورت باید مدل پخش- پرش جهت مدل‌سازی فرآیند مورد مطالعه انتخاب شود. اما از نظر عملی ممکن است معیار پائولا باعث خطا در انتخاب مدل شود و علت آن به مساله گسسته سازی فرآیند مورد مطالعه و فرکانس محدود نمونه برداری در عمل بر می‌گردد. یعنی اگر حتی فرآیند اصلی از نظر تئوری پیوسته هم باشد، هنگام نمونه برداری با فرکانس محدود، مشاهدات ما دارای پرش خواهند بود و بسته به نرخ نمونه برداری ممکن است پرشهایی با دامنه بزرگ در مشاهدات وجود داشته باشند در حالیکه در فرآیند واقعی چنین پرشهایی وجود ندارد و

لذا ممکن است فرآیند تصادفی پیوسته را به اشتباه، ناپیوسته تشخیص دهیم. در نتیجه وجود ضریب کرامرز- مویال مرتبه چهار غیر صفر دلیل محکمی برای ناپیوسته بودن فرآیند زیربنایی نمی باشد. به عنوان یک راهکار عملی جهت تشخیص صحیح نوع فرآیند زیربنایی، رابطه‌ای به فرم زیر بین ممانهای شرطی دوم و چهارم برای یک فرآیند پخش- پرش استخراج شده است (لنرتز و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۱۸):

$$\frac{M_J^{(4)}(x, t)}{3 \left( M_J^{(2)}(x, t) \right)^2} \simeq \frac{\langle \xi^4 \rangle \lambda(x) \tau}{3(\beta^2 + \langle \xi^2 \rangle \lambda(x))^2 \tau^2} \sim \frac{1}{\tau} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

براساس رابطه ۱۵، برای یک فرآیند پخش- پرش، نسبت  $\frac{M_J^{(4)}(x, t)}{3 \left( M_J^{(2)}(x, t) \right)^2}$  با کاهش  $\tau$  و اگر می شود در حالیکه این نسبت برای یک فرآیند پخش محض برابر یک می باشد. بدین ترتیب اگر نسبت مذکور را از روی داده‌ها محاسبه و بر حسب  $\tau$  رسم کنیم و منحنی حاصل یک خط افقی باشد آنگاه ادعا می شود فرآیند زیربنایی یک فرآیند پخش می باشد ولی اگر منحنی حاصل با کاهش مقدار  $\tau$  و اگر آنگاه ادعا می شود فرآیند زیربنایی یک فرآیند پخش- پرش می باشد. معیار جالب دیگری که توسط (لنرتز و همکاران، ۲۰۱۸) برای تشخیص نوع فرآیند معرفی شده است، کمیت  $Q(x)$  می باشد. مقدار این کمیت با استفاده از روابط استخراج شده برای ممانهای شرطی چهارم و ششم به صورت زیر می باشد:

$$Q(x) = \frac{M^{(6)}(x)}{5M^{(4)}(x)} \approx \begin{cases} \tau\beta^2(x) & \text{برای پخش} \\ \sigma_\xi^2(x) & \text{برای پرش} \end{cases} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

<sup>۱</sup> Lehnertz et al., 2018

با توجه به رابطه ۱۶، انتظار داریم برای یک فرآیند پخش-پرش، کمیت  $Q(x)$  مستقل از  $\tau$  و یک خط افقی باشد در حالیکه برای فرآیند پخش محض،  $Q(x)$  با  $\tau$  رابطه خطی دارد و در حقیقت شیب منحنی  $Q-\tau$  برابر مجذور ضریب پخش در فرآیند پخش محض می‌باشد.

#### ۴. نتایج برآورد

در این بخش نتایج استفاده از روش کرامرز-موپال در تخمین پارامترهای مدل پخش پرش آورده شده است.

#### ۴-۱- ارزیابی دقت روش کرامرز-موپال

در ابتدای این بخش جهت ارزیابی دقت روش ارائه شده، یک سیگنال تصنعی<sup>۱</sup> تولید می‌کنیم که دینامیک آن از معادله لانژون تعمیم یافته معرفی شده در رابطه ۱۰ به صورت زیر پیروی می‌کند:

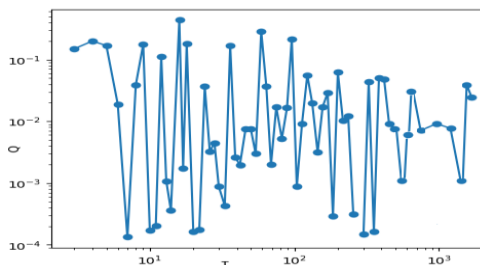
$$\begin{cases} dX_t = -10X_t + 2X_t dW_t + \xi dj \\ \xi \sim Normal(0,1), \quad \lambda = 0.1 \end{cases} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

روش حل عددی مورد استفاده برای تولید سیگنال تصنعی از روی معادله موجود در رابطه ۱۷، روش اویلر-ماریاما (پلین و بروتی-لیبراتی<sup>۲</sup>، ۲۰۱۰) بوده و تعداد داده های تولید شده برابر  $10^7$  می‌باشد.

با در نظر گرفتن این سیگنال تصنعی به عنوان یک فرآیند ناشناخته، اولین قدم در بازسازی آن انتخاب بین مدل پخش محض و مدل پخش-پرش به عنوان دینامیک زیربنایی این فرآیند مجهول می‌باشد. همانطور که بیان شد رفتار کمیت  $Q$  معیار خوبی برای انتخاب بین این دو مدل می‌باشد. نمودار  $Q$  مربوط به این فرآیند در شکل ۱ آمده است:

<sup>۱</sup> منظور از سیگنال تصنعی (Synthetic Signal) سیگنالی است که دینامیک آن را خودمان تعریف می‌کنیم و لذا برای ما فرآیندی شناخته شده می‌باشد.

<sup>۲</sup> Platen & Bruti-Liberati, 2010



شکل ۱. منحنی Q-t برای داده‌های تصنعی<sup>۱</sup>

با توجه به نمودار Q استخراج شده می‌توان نتیجه گرفت که فرآیند مورد مطالعه باید با مدل پخش-پرش مدلسازی شود و این نتیجه با توجه به اینکه سیگنال تصنعی ما نیز دارای پرش می‌باشد مورد انتظار بود. توزیع احتمال مورد استفاده جهت محاسبه ممان‌ها، با استفاده از روش تخمین چگالی کرنل با کرنل‌های ایپانچنیکو<sup>۲</sup> استخراج شده است (نادارایا<sup>۳</sup>، ۱۹۶۴؛ واتسون<sup>۴</sup>، ۱۹۶۴). نتایج تخمین زده شده برای نرخ و دامنه پرش در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱. تخمین مقادیر نرخ و دامنه پرش

	$\lambda$	$\sigma_{\xi}^2$
مقدار واقعی	۰/۱	۱
مقدار تخمین زده شده	۰/۱۰۶۶	۰/۹۴۸۰

لازم به ذکر است تمامی محاسبات و استخراج نمودارهای موجود در این مقاله در محیط پایتون انجام شده است و به طور نمونه محاسبه ممان‌ها و تخمین چگالی مورد نیاز برای استخراج مقادیر نرخ و دامنه پرش آورده شده در جدول ۱ توسط پکیج‌های آماری موجود در کتابخانه scipy.stats انجام شده است. نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد تخمین نرخ پرش نسبت به مقدار واقعی آن اندکی

<sup>۱</sup> Synthetic data

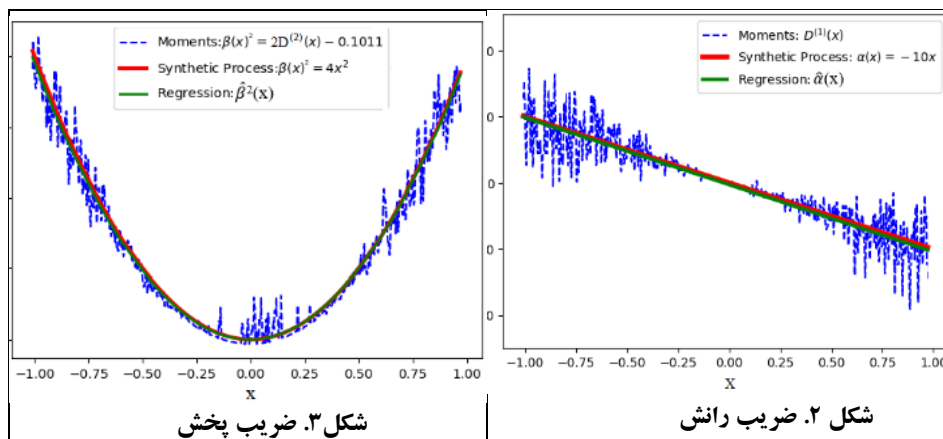
<sup>۲</sup> Epanechnikov

<sup>۳</sup> Nadaraya (1964)

<sup>۴</sup> Watson (1964)

خطای بیش برآورد دارد در حالیکه تخمین اندازه پرش دارای خطای کم برآورد می‌باشد. انجام چندین مورد تخمین عملی با روش ممانهای شرطی نشان می‌دهد که هنگام استفاده از این روش، نوع خطا برای پارامترهای نرخ و اندازه پرش تغییر نمی‌کند یعنی در مورد تخمین اندازه پرش همواره شاهد خطای کم برآورد و در مورد تخمین نرخ پرش همواره شاهد خطای بیش برآورد هستیم و این نکته از نظر عملی در تنظیم دقیق پارامترهای مدل مفید می‌باشد چرا که به عنوان مثال، پس از برآورد مقدار نرخ پرش از روی داده‌ها و با توجه به وجود خطای بیش برآورد در مورد این پارامتر، می‌توان با اتخاذ مقادیر کوچکتر برای آن و انجام آزمون خودسازگاری (که در بخش بعدی معرفی می‌شود) نسبت به انتخاب دقیق مقدار این پارامتر تصمیم‌گیری کرد.

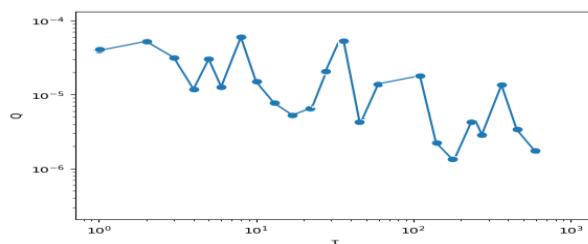
نمودارهای مربوط به ضرایب رانش و پخش، براساس مقادیر موجود در فرآیند تصنعی بیان شده در رابطه ۱۷ (—) و براساس مقادیر استخراج شده به روش کرامرز-مویال (---) و همچنین منحنیهای تخمین زده شده برای این ضرایب از روی داده‌های خروجی کرامرز-مویال (—) در شکل‌های ۲ و ۳ آمده است:



با توجه به شکل ۲، منحنی تخمین زده شده براساس ضرایب کرامرز- مویال (سبز رنگ) بر منحنی واقعی  $\alpha(x) = -1.0x$  (قرمز رنگ) منطبق می باشد. همچنین با توجه به شکل ۳، منحنی  $\hat{\beta}(x) = 4x^2$  که براساس ضرایب کرامرز- مویال تخمین زده شده (سبز رنگ) مقدار واقعی ضریب پخش یعنی  $\beta(x) = 2x$  (قرمز رنگ) را تایید می کند.

#### ۴-۲- کاربرد عملی: استخراج دینامیک قیمت رمزارز اتریوم

در این بخش به عنوان یک نمونه از کاربرد روش کرامرز- مویال در استخراج دینامیک فرآیندهای تصادفی واقعی، فرآیند قیمت رمزارز اتریوم را در نظر می گیریم. یک دلیل انتخاب رمزارز مذکور این بود که در روش کرامرز- مویال جهت استخراج دقیق تر پارامترها، نیاز به تعداد زیاد داده می باشد و لذا با توجه به قدمت این رمزارز نسبت به رمزارزهای جدید و وجود تعداد کافی مشاهدات برای آن (حدود سه میلیون داده) مشکل حجم محدود داده حل خواهد شد. البته مساله وجود حجم کافی داده با استفاده از داده های بیت کوین نیز قابل حل می باشد و ترجیحی بین این دو نیست. دلیل دوم استفاده از این رمزارز، رایگان بودن داده های قیمتی آن حتی در رنج یک دقیقه می باشد بطوریکه در این تحقیق از داده های موجود در سایت [cryptoarchive.com](http://cryptoarchive.com) و با نرخ نمونه برداری یک دقیقه از ۱۷ اکتبر ۲۰۱۷ تا ۲ فوریه ۲۰۲۴ استفاده شده است. با توجه به غیرایستنا بودن فرآیند قیمت، از داده های بازده لگاریتمی آن برای انجام محاسبات استفاده شده است. مشابه مراحل انجام شده در بخش قبل، دوباره ابتدا مدل مناسب برای فرآیند زیر بنایی تولید داده را با استفاده از کمیت  $Q$  تعیین می کنیم. رفتار کمیت  $Q$  نسبت به  $\tau$  برای این فرآیند در شکل ۴ آمده است:



شکل ۴. منحنی  $Q$ - $\tau$  برای داده های واقعی

دوباره با توجه به شکل ۴ کمیت  $Q$  مستقل از  $\tau$  و افقی می‌باشد و لذا مدل مناسب برای این فرآیند، مدل پخش- پرش می‌باشد. مقادیر ضریب رانش، ضریب پخش، دامنه پرش و نرخ پرش استخراج شده به روش کرامرز- مویال برای دوره‌های روزانه در جدول ۲ آمده است:

جدول ۲. تخمین پارامترهای مدل پخش-پرش

ضریب رانش	$-14.04X$
ضریب پخش	$31/3X$
دامنه پرش	$0/000003$
نرخ پرش	۱۲۹۰

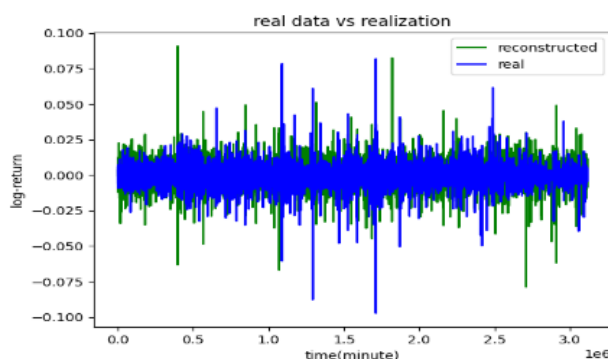
تفسیر مقدار ضریب رانش استخراج شده به طور غیرمستقیم و براساس تعریف تابع پتانسیل می‌باشد. تابع پتانسیل که الف) محدود کننده رفتار یک فرآیند، ب) شکل دهنده تعادل‌های پایدار و ناپایدار و پ) تعیین کننده میزان تاب آوری سیستم می‌باشد از روی ضریب اول کرامرز- مویال (ضریب رانش) قابل استخراج می‌باشد چرا که ضریب اول کرامرز- مویال برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌باشد (آرانی<sup>۱</sup> و همکاران، ۲۰۲۱). برای مورد عملی بررسی شده در این تحقیق و با توجه به نتایج موجود در جدول ۲، ضریب رانش به صورت یک تابع خطی استخراج شده است و لذا تابع پتانسیل مربوطه یک سهمی درجه دوم خواهد بود و در نتیجه فرآیند مورد مطالعه یک تعادل پایدار در نقطه صفر خواهد داشت (شکل ۵). نکته جالب اینکه هرچه ضریب رانش استخراج شده کوچک‌تر و در نتیجه سهمی حاصل برای تابع پتانسیل عریض‌تر باشد، انتظار داریم که دامنه نوسانات حول تعادل بزرگ‌تر باشد که معادل نرخ میرایی کوچک، زمان بازگشت به میانگین طولانی و آنتروپی بالا برای فرآیند می‌باشد و برعکس، هرچه سهمی حاصل باریک‌تر باشد، انتظار داریم که دامنه نوسانات حول تعادل کوچک‌تر باشد.

ضریب پخش استخراج شده برای فرآیند واقعی مورد مطالعه، نسبت به ضریب پخش فرآیند مصنوعی پخش قبل مقدار بزرگتری دارد و لذا با مقایسه این پارامتر برای دو فرآیند مذکور می‌توان نتیجه گرفت که در فرآیند واقعی مورد مطالعه، حلقه بازخورد مثبت قوی‌تری نسبت به فرآیند

<sup>۱</sup> Arani et al. 2021

تصنعی معرفی شده شکل می گیرد و بعبارتی دیگر اگر نویز یکسانی به هر دو سیستم فوق وارد شود آنگاه تقویت نویز در سیستمی که ضریب پخش بزرگتری دارد شدیدتر خواهد بود و بعبارت دیگر هنگام بروز شوک، فرآیندی که ضریب پخش بزرگتری دارد دامنه نوسانات بزرگتری را حول تعادل تجربه خواهد کرد. با توجه به تفاسیر بیان شده برای ضرایب موجود در رابطه ۱۰ در بخش قبل، اگرچه نرخ پرشها بالا است ولی دامنه پرش کوچک استخراج شده در جدول ۲ نشان می دهد که بازار این رمزارز عمق زیاد و نقد شوندگی بالایی دارد و بعبارت دیگر احتمال قفل شدن بازار در مورد این رمزارز پایین می باشد.

با حل عددی معادله دیفرانسیل تصادفی حاصل از نتایج جدول ۲، می توان مسیرهای تصادفی این فرآیند را تولید کرد. روش حل عددی مورد استفاده برای انتگرال گیری از دینامیک حاصل، باز هم مثل بخش قبل روش اویلر-ماریاما می باشد. یک نمونه از مسیر تصادفی تولید شده برای بازده لگاریتمی به همراه مسیر داده های واقعی در شکل ۵ آمده است.



شکل ۵. بازده لگاریتمی شبیه سازی شده (—) در مقابل بازده لگاریتمی داده های واقعی (—)

#### ۴-۳- آزمون خودسازگاری<sup>۱</sup> برای ارزیابی صحت بازسازی

آزمون خودسازگاری برای بررسی صحت بازسازی یک سیگنال ناشناخته می باشد. در سیگنالهای تعینی<sup>۲</sup> پس از بازسازی، ما با یک منحنی مسیر<sup>۳</sup> مشخص مواجه هستیم اما پس از

<sup>۱</sup> Self-consistency check

<sup>۲</sup> deterministic

<sup>۳</sup> Trajectory

بازسازی سیگنال‌های تصادفی ما مسیرهای تصادفی مختلفی از سیگنال بازسازی شده را خواهیم داشت بطوریکه به ازای هر مقدار جمله تصادفی موجود در دینامیک سیستم یک تحقق<sup>۱</sup> جدید از فرآیند خواهیم داشت. لذا برای بررسی صحت بازسازی نیاز به مقایسه توزیع احتمال سیگنال اصلی با سیگنال بازسازی شده می‌باشد.

دو آزمون مشهور برای بررسی خودسازگاری، آزمون واگرایی کولبک-لیبلر<sup>۲</sup> (کوور<sup>۳</sup>، ۱۹۹۹) و آزمون واگرایی جنسن-شانون<sup>۴</sup> (لین<sup>۵</sup>، ۱۹۹۱؛ مانینگ و شاتز<sup>۶</sup>، ۱۹۹۹) می‌باشند. در این آزمون‌ها هرچه مقدار واگرایی محاسبه شده بین توزیع احتمال سیگنال اصلی و سیگنال بازسازی شده به صفر نزدیکتر باشد بیانگر خوبی برازش ضرایب معادله دیفرانسیل تصادفی می‌باشد بطوریکه مقدار صفر برای واگرایی، بیانگر یکسان بودن دو توزیع می‌باشد. KL-div به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$KL(P||Q) = -\sum P_i \log\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) = \sum P_i \log\left(\frac{Q_i}{P_i}\right) \quad \text{رابطه ۱۸}$$

شهود این کمیت را می‌توان چنین بیان کرد که در صورتیکه احتمال یک پیشامد براساس توزیع P بالا است اما احتمال همان پیشامد براساس توزیع Q پایین است آنگاه مقدار بزرگی برای کمیت KL شاهد خواهیم بود که بیانگر واگرایی بزرگ بین دو توزیع می‌باشد و همچنین اگر احتمال یک پیشامد براساس توزیع P پایین باشد اما احتمال همان پیشامد براساس توزیع Q بالا باشد باز هم واگرایی بین دو توزیع بزرگ گزارش خواهد شد اما نه به بزرگی حالت قبل. یعنی در آزمون KL-div فرق می‌کند که کدام توزیع به عنوان توزیع مرجع در نظر گرفته شود و به عبارتی این آزمون متقارن نیست.

اما بر خلاف آزمون KL-div، آزمون JS-div که به صورت زیر و از روی KL-div ساخته می‌شود متقارن می‌باشد:

<sup>۱</sup> realization

<sup>۲</sup> Kullback-Leibler

<sup>۳</sup> Cover (1999)

<sup>۴</sup> Jensen-Shannon

<sup>۵</sup> Lin (1991)

<sup>۶</sup> Manning & Schutze (1999)

$$\begin{cases} JS(P||Q) = \frac{1}{2}(KL(P||M) + KL(Q||M)) \\ M = \frac{1}{2}(P + Q) \end{cases} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

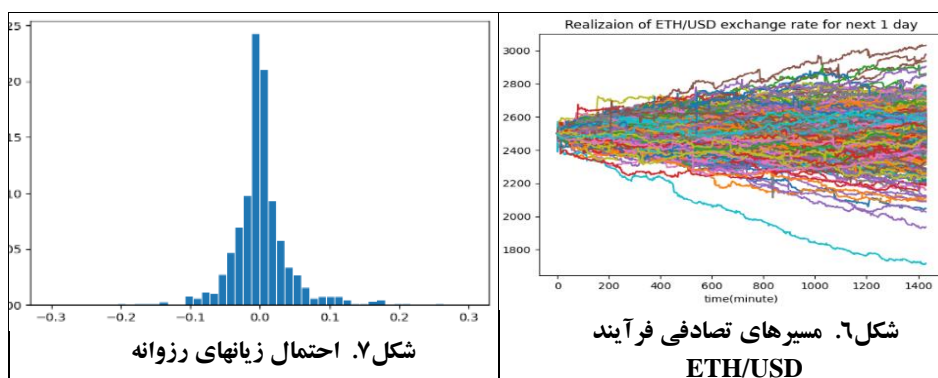
مزیت آزمون JS-div نسبت به KL-div علاوه بر متقارن بودن آن  $(JS(P || Q) = JS(Q || P))$ ، این است که مقدار این کمیت برای لگارتیم مبنای ۲ در بازه  $[0, 1]$  قرار دارد. مقدار صفر این کمیت بیانگر یکسان بودن دو توزیع و مقدار یک آن بیانگر عدم تشابه دو توزیع می‌باشد. نتایج آزمونهای KL-div و JS-div برای بررسی صحت بازسازی انجام شده در جدول ۳ آورده شده است:

جدول ۳. نتایج آزمونهای خودسازگاری

KL-div	۰/۰۰۴
JS-div	۰/۰۳۶

مقادیر نزدیک به صفر هر دو آزمون خودسازگاری، نشان از دقت روش کرامرز-موپال در بازسازی سیگنال ناشناخته دارد. حال پس از اطمینان از صحت بازسازی دینامیک فرآیند مورد مطالعه از روی داده‌ها، می‌توان با استفاده از دینامیک استخراج شده به سوالهای رایج در مورد فرآیندهای تصادفی پاسخ داد. در مسایل فیزیک آماری و سیستمهای پیچیده با توجه به درجات آزادی بالا و عدم قطعیت موجود، صحبت از تعیین مسیر مشخص برای حرکت یک ذره موجود در سیستم نمی‌باشد بلکه هدف بررسی رفتار ماکروسکوپی سیستم می‌باشد. به عنوان مثال در مورد آب، مساله تعیین مسیر دقیق حرکت یک مولکول آب نیست بلکه مساله این است که چه موقع آب به جوش می‌آید (کی گذار فاز اتفاق می‌افتد)؟ یا پس از چه مدتی آب به دمای مشخصی می‌رسد؟ در مورد بازار نیز به عنوان یک سیستم پیچیده مساله، تعیین مسیر دقیق حرکت قیمت نیست بلکه سوالهای صحیح در این حوزه از این جنس هستند: حداکثر زیان در یک دوره خاص چقدر است؟ با چه احتمالی قیمت دارایی در یک دوره معین از مرز مشخصی عبور می‌کند؟ احتمال اینکه قیمت در روز مشخصی از مرز تعیین شده عبور کند چقدر است؟ اینها نمونه مسائلی

هستند که با در دست داشتن دینامیک فرآیند قابل پاسخگویی هستند. در ادامه نمونه‌ای از مسیرهای تصادفی فرآیند مورد مطالعه (با مشخصات جدول ۲) با نقطه شروع  $x=2500$  و در افق زمانی یک روزه در شکل ۶ و همچنین توزیع احتمال زیانهای روزانه با شبیه سازی دینامیک این فرآیند به تعداد ۱۰۰۰۰ بار در شکل ۷ آمده است. با توجه به نتایج شبیه سازی، دامنه بزرگ نوسانات روزانه و احتمال زیانهای روزانه بزرگ (حدود ۲۰ درصد) نشان از پر ریسک بودن این بازار دارد.



با شبیه سازی به تعداد ۲۱۶۴ بار (برابر با تعداد روزهای داده‌های واقعی)، مقدار کوانتیل ۹۹٫۹ درصد بازده و زیان روزانه، میانگین و انحراف معیار استاندارد بازده روزانه بدست آمده و نتایج در جدول ۴ به همراه مقادیر مربوطه برای داده‌های واقعی آمده است:

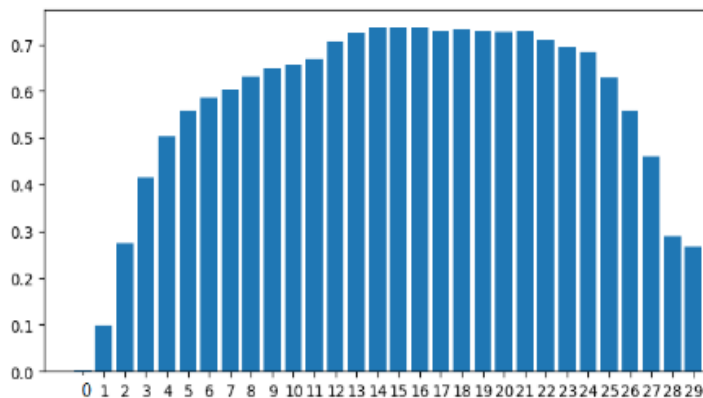
جدول ۴. مقایسه نتایج شبیه سازی با مقادیر واقعی

داده های واقعی	شبیه سازی	
۰/۲۱۰۹	۰/۲۲۸۶	کوانتیل ۹۹ درصد بازده روزانه
۰/۲۰۸۳	۰/۲۰۸۹	کوانتیل ۹۹ درصد زیان روزانه
۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۶۵	میانگین زیانهای روزانه
۰/۰۴۷۷	۰/۰۴۳۶	انحراف معیار استاندارد زیانهای روزانه

مساله عبور مقدار فرآیند تصادفی از یک مرز مشخص در زمان معین به مساله اولین زمان گذر<sup>۱</sup> مشهور است. محاسبه توزیع احتمال زمانهای اولین گذر برای یک فرآیند پخش محض به صورت تحلیلی انجام شده است و بر این اساس احتمال اینکه فرآیند پخش با شروع از نقطه اولیه  $x_0$ ، در زمان  $t$  از مرز  $a$  عبور کند برابر است با (تبار، ۲۰۱۹):

$$f(t) = \frac{|a - x_0|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(a-x_0)^2}{2t}} \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

اما در مورد فرآیندهای پخش-پرش در حالت کلی جواب تحلیلی ارائه نشده است لذا همانطور که در مقدمه بیان شد چاره کار در این مورد، محاسبه توزیع احتمال مذکور بر اساس شبیه سازی می باشد. برای فرآیند مورد مطالعه ما، با فرض اینکه پس از یک شوک خارجی مقدار فرآیند به نقطه  $x=2500$  جهش کرده باشد و با فرض اینکه بین دو شوک خارجی به اندازه کافی فاصله زمانی وجود داشته باشد آنگاه، توزیع احتمال زمان اولین گذر این فرآیند از مرز  $x=3000$  برای یک دوره ۳۰ روزه و با فرض قرار داشتن در فاز صعودی بازار، به صورت نمودار شکل ۸ بدست آمده است:

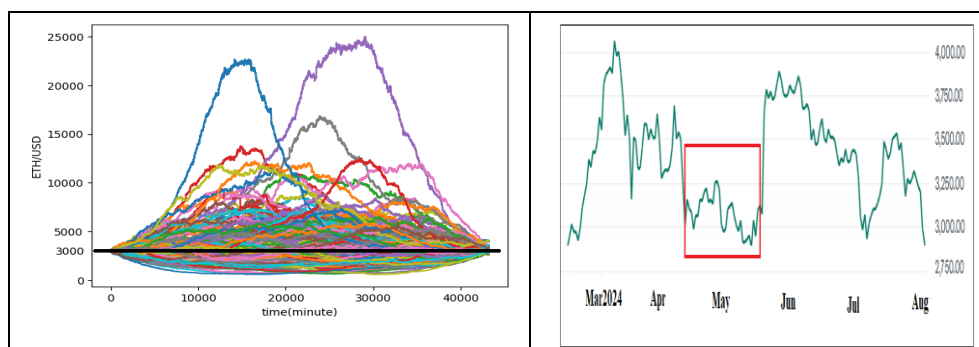


شکل ۸. توزیع احتمال زمان اولین گذر

<sup>۱</sup> First Passage Time

نتایج نمودار ۸ که با شبیه سازی دینامیک استخراج شده به تعداد ۱۰۰۰ بار به دست آمده است نشان می‌دهد که با احتمال ۷۰ درصد، اولین گذر قیمت دارایی از مرز  $x=3000$  بین روزهای چهاردهم تا بیست و یکم خواهد بود و نگاهی به نمودار قیمت این دارایی در سایت یاهو فاینانس این نتیجه را تأیید می‌کند بطوریکه با توجه به نمودار ETH-USD در یاهو فاینانس، قیمت این دارایی در تاریخ دهم فوریه ۲۰۲۴ حدود ۲۵۰۰ دلار بوده و با شروع از این نقطه، اگرچه قیمت در تاریخ ۲۰ فوریه سطح ۳۰۰۰ دلار را لمس کرده است ولی قادر به شکستن سد نبوده و اولین گذر قطعی قیمت این دارایی از مرز ۳۰۰۰ دلار در تاریخ بیست و چهارم فوریه ۲۰۲۴ می‌باشد. کاربرد اخیر که مساله گذار مقدار فرآیند از یک مرز مشخص می‌باشد نمونه‌ای از مسایلی است که اهمیت استخراج دینامیک یک فرآیند تصادفی را نسبت به استخراج توزیع احتمال آن نشان می‌دهد چرا که همانطور که قبلاً در مقدمه بیان کردیم دو فرآیند با توزیع احتمال یکسان، می‌توانند دینامیک متفاوتی داشته باشند و لذا با صرف داشتن توزیع احتمال فرآیند، سوالات زیادی در مورد رفتار آن فرآیند بی پاسخ می‌ماند.

به عنوان تاییدی دیگر بر صحت بازسازی انجام شده، از روی داده‌های تاریخی موجود در سایت یاهو فاینانس (شکل ۹) نمودار ETH-USD را در بازه یک ماهه (پنجره قرمز) از ۱۳ آوریل ۲۰۲۴ تا ۱۳ می ۲۰۲۴ در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه بازه مذکور بین دو شوک بزرگ قرار گرفته است، انتظار داریم مدل ما بتواند دینامیک کوتاه مدت مشاهده شده در این بازه را توضیح دهد. شکل ۱۰ مربوط به نتایج شبیه سازی فرآیند باز سازی شده با نقطه شروع  $x=3000$  (مقدار واقعی فرآیند در ۱۳ آوریل ۲۰۲۴) و افق زمانی یکماهه می‌باشد.



شکل ۱۰. شبیه سازی دینامیک استخراج شده با قیمت اولیه ۳۰۰۰ دلار و افق زمانی یکماهه	شکل ۹. نمودار تاریخی ETH-USD
--	------------------------------

نتایج شبیه سازی (شکل ۱۰) نشان می دهد که قیمت این دارایی با شروع از مقدار اولیه ۳۰۰۰ دلار، علیرغم اینکه می تواند مسیرهای تصادفی مختلفی را در طول بازه یکماهه داشته باشد ولی در نهایت به مقدار اولیه خود یعنی سطح ۳۰۰۰ دلار برخواهد گشت. جهت تفسیر نتیجه فوق، ابتدا یاد آوری می کنیم که برر سی سایت بلومبرگ نشان می دهد در بازه زمانی مذکور خبر مهم مرتبطی با این رمزارز منتشر نشده است لذا با توجه به آنچه قبلاً براساس دیدگاه استاندارد در اقتصاد بیان کردیم، پس از بروز شوک خارجی اول و با توجه به تعدیل سریع قیمتها براساس این دیدگاه، انتظار داریم تعادل جدیدی شکل گیرد که همان مقدار تعادلی ۳۰۰۰ دلار می باشد. باز همانطور که در بخش نظری بیان شد اگر تغییرات قیمت صرفاً ناشی از شوکهای خارجی باشد آنگاه در بازه بین این دو شوک بزرگ ما باید صرفاً شاهد رفتار اختلالی<sup>۱</sup> در حرکت قیمت می بودیم در حالیکه نمودار قیمت واقعی، رفتاری غیراختلالی و با دامنه بزرگ نوسانات روزانه را نشان می دهد. این رفتار غیر اختلالی (پرشها)، درونزا بوده و حتی در غیاب اخبار کلان مرتبط با دارایی مورد مطالعه نیز می تواند شکل بگیرد لذا ادعا می شود بازارهای مالی رفتار غیر تعادلی دارند و آرام نمی گیرند بدین معنی که حتی در غیاب اخبار اقتصادی و صرفاً در سایه شکل گیری روایات اقتصادی<sup>۲</sup>، ترس و طمع<sup>۳</sup> معامله گران و تقلید توده وار<sup>۴</sup> عوامل از یکدیگر، بازار دچار هیجانات غیرمنطقی<sup>۵</sup> می شود و این هیجانات بخاطر وجود مکانسیم فیدبک مثبت در رفتار عوامل، تقویت شده و پرشهای درونزا ایجاد می کنند و اصطلاحاً بیان می شود که "بازار خودش اخبار خودش را می سازد"<sup>۶</sup>. فارمر<sup>۷</sup> (۲۰۲۴)، وقوع بحران مالی ۲۰۰۸ را نمونه بارز چنین دیدگاهی می داند بطوریکه در آن

<sup>۱</sup> perturbative

<sup>۲</sup> Narratives

<sup>۳</sup> Fear&Greed

<sup>۴</sup> Herding

<sup>۵</sup> Irrational Exurbance

<sup>۶</sup> Market makes its own news

<sup>۷</sup> Farmer

دوران در کمال ناباوری و در شرایطی که شوک منفی خارجی (با دامنه توجیه کننده سقوط بازار) گزارش نشده بود شاهد ریزش سنگین قیمت دارائیه‌ها بودیم.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که معادله دیفرانسیل تصادفی استخراج شده می‌تواند رفتار پخش-پرش فرآیند قیمت را در بازه کوتاه مدت مذکور به خوبی تولید کند و لذا توانایی مدل ارائه شده در پیش‌بینی خارج از نمونه نیز قابل قبول می‌باشد چرا که داده‌های مورد استفاده برای استخراج دینامیک فرآیند تا تاریخ ۲ فوریه ۲۰۲۴ بوده است در حالیکه پیش‌بینی برای زمان بعد از این تاریخ انجام شده است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق بجای تصریح یک مدل خاص برای تولید پرشهای درونزا، ما فرم عمومی یک معادله دیفرانسیل تصادفی را برای فرآیند مورد مطالعه در نظر گرفتیم و از این نظر ادعا می‌کنیم که روش ما یک روش غیرپارامتری می‌باشد چرا که فرم خاصی برای پارامترهای رانش، پخش و پرش در نظر نگرفته‌ایم. مقایسه روش ناپارامتری کرامرز-مویال با روش‌های پارامتری مثل مدل‌های مارکوف پنهان، مدل‌های شاخه‌ای و مدل‌های استنباط وردشی، نشان می‌دهد که، این روش محاسبات سرراست تر و سبک‌تری نسبت به روشهای پارامتری مذکور دارد چرا که به عنوان مثال اگر بخواهیم در مدل مارکوف پنهان برای حالت پنهان و فرآیند ثانویه، توزیع‌هایی به ترتیب غیر از توزیع برنولی و نرمال در نظر بگیریم، نیاز به محاسبات سنگینی خواهد بود در حالیکه در روش ناپارامتری ما، تمام تخمین‌ها فقط بر اساس محاسبه ممان‌های شرطی می‌باشد.

استفاده از روش کرامرز-مویال برای استخراج ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته از روی داده‌های تصنعی نشان می‌دهد که این روش با دقت خوبی قادر به استخراج ضرایب مدل می‌باشد. محققان حوزه فیزیک آماری که از مهم‌کاربران معادله لانژون تعمیم یافته هستند نشان می‌دهند که روش کرامرز-مویال در تخمین ضرایب معادله لانژون تعمیم یافته بهتر از روشهای حداکثر

درست نمایی، کرنل و هیستوگرام عمل می‌کند و ما نیز با توجه به برتری روش کرامرز-مویال و از آنجائیکه مدل‌های پخش-پرش مورد استفاده در مالی حالت خاصی از معادله لانژون تعمیم یافته می‌باشند بر آن شدیم که برای اولین بار در حوزه مالی این روش را جهت استخراج ضرایب مدل پخش-پرش بکار ببریم. نتیجه استفاده از این روش داده-محور در کاربرد عملی ارائه شده نشان می‌دهد که مشابه مدل مرتون، در اینجا نیز ضرایب رانش و پخش تابعی خطی از متغیر حالت سیستم می‌باشند با این تفاوت که در مدل مرتون این ضرایب به صورت پیش فرض تابع خطی از متغیر حالت در نظر گرفته شده بودند ولی در اینجا ما به روش غیر پارامتری آنها را استخراج کرده‌ایم.

از نظر کاربردی، پس از استخراج ضریب اول کرامرز-مویال، تابع پتانسیل که محدود کننده رفتار فرآیند و تعیین کننده نقاط تعادل سیستم می‌باشد نیز در دسترس خواهد بود چرا که ضریب اول کرامرز-مویال برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل می‌باشد. همچنین با استفاده از نتایج این تحقیق و پس از بازسازی و اجرای فرآیند به تعداد زیاد می‌توان مقدار ارزش در معرض خطر را محاسبه نمود. یک کاربرد مهم دیگر از دینامیک استخراج شده، محاسبه توزیع احتمال اولین زمان خروج می‌باشد. با توجه به اینکه در صورت وجود پرش در فرآیند تصادفی، در حالت کلی جواب تحلیلی برای توزیع مذکور وجود ندارد ما با شبیه سازی دینامیک استخراج شده این توزیع را بدست آورده‌ایم. با در دست داشتن دینامیک یک فرآیند، خیلی از سوالات دیگر که ما در این تحقیق به آن پرداختیم قابل بررسی است از جمله متوسط زمان حضور متغیر حالت سیستم حول یک تعادل خاص، محاسبه زمان بهینه خروج از بازار و...

مقاله را با بیان این نکته به پایان می‌بریم که تعمیم معادله لانژون یک بعدی به حالت دوبعدی و استفاده از آن در حوزه فیزیک انجام شده است و لذا به عنوان یک کاربرد از معادله لانژون دوبعدی در حوزه مالی می‌توان به استخراج مدل هستون<sup>۱</sup> اشاره کرد چرا که مدل هستون حالت خاصی از معادله لانژون دو بعدی می‌باشد.

<sup>۱</sup> Heston model



## References

- Abdolmaleki, H., Mohammadi, SH., Kamali, S., & Vaziri, R. (2013). Surveying the Existence of Price Bubble in Tehran Stock Exchange (by using the LPPL Model). *Financial Engineering and Securities (Portfolio Management)*, 4(14), 0-0. SID. <https://sid.ir/paper/390725> (In Persian)
- Anvari, M., Tabar, M. R. R., Peinke, J., & Lehnertz, K. (2016). Disentangling the stochastic behavior of complex time series. *Scientific Reports*, 6(1), 35435 .
- Arani, B. M., Carpenter, S. R., Lahti, L., Van Nes, E. H., & Scheffer, M. (2021). Exit time as a measure of ecological resilience. *Science*, 372(6547), eaay4895.
- Barro, R. J. (2009). Rare disasters, asset prices, and welfare costs. *American economic review*, 99(1), 243-264 .
- Brunnermeier, M., & Krishnamurthy, A. (2020). Corporate debt overhang and credit policy. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2020(2), 447-502
- Brunnermeier, M. (2024). Presidential Address: Macrofinance and Resilience. *The Journal of Finance*.
- Bouchaud, J.-P., Bonart, J., Donier, J., & Gould, M. (2018). *Trades, quotes and prices: financial markets under the microscope*. Cambridge University Press.
- Campbell, J. Y., & Cochrane, J. H. (1999). By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of political Economy*, 107(2), 205-251 .
- Case, K. E., Shiller, R. J., & Thompson, A. (2014). What have they been thinking? Homebuyer behavior in hot and cold markets—A 2014 update .
- Cochrane, J. H. (2017). Macro-finance. *Review of Finance*, 21(3), 945-985 .
- Cover, T. M. (1999). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons .
- Cutler, D. M., Poterba, J. M., & Summers, L. H. (1988). What moves stock prices? In: National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA.
- Farmer, J. D. (2024). *Making Sense of Chaos: A Better Economics for a Better World*. Allen Lane .
- Farmer, R. E. (2010). *How the economy works: confidence, crashes and self-fulfilling prophecies*. Oxford University Press .
- Fosset, A., Bouchaud, J.-P., & Benzaquen, M. (2020). Endogenous liquidity crises. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2020(6), 063401 .
- Gabaix, X., & Koijen, R. S. (2021). *In search of the origins of financial fluctuations: The inelastic markets hypothesis* .
- Gardiner, C. W. (1985). *Handbook of stochastic methods* (Vol. 3). Springer Berlin .
- Gennaioli, N., & Shleifer, A. (2018). *A crisis of beliefs: Investor psychology and financial fragility*. Princeton University Press .
- Gopikrishnan, P., Plerou, V., Amaral, L. A. N., Meyer, M., & Stanley, H. E. (1999). Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, 60(5), 5305 .
- Greenwood, R., Hanson, S. G., Shleifer, A., & Sørensen, J. A. (2022). Predictable financial crises. *The Journal of Finance*, 77(2), 863-921 .
- Halperin, I. (2022). Non-equilibrium skewness, market crises, and option pricing: Non-linear Langevin model of markets with supersymmetry. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 594, 127065.

- Hansen, L. P., & Sargent, T. J. (2019). *Macroeconomic Uncertainty Prices* .
- Hansen, L. P., & Sargent, T. J. (2022). Structured ambiguity and model misspecification. *Journal of Economic Theory*, 199, 105165 .
- He, Z., & Krishnamurthy, A. (2018). Intermediary asset pricing and the financial crisis. *Annual Review of Financial Economics*, 10, 173-197 .
- Izhakian, Y., & Benninga, S. (2011). The uncertainty premium in an ambiguous economy. *The Quarterly Journal of Finance*, 1(02), 323-354 .
- Joulin, A., Lefevre, A., Grunberg, D., & Bouchaud, J.-P. (2008). Stock price jumps: news and volume play a minor role. *arXiv preprint arXiv:0803.1769* .
- Lehnertz, K., Zabawa, L., & Tabar, M. R. R. (2018). Characterizing abrupt transitions in stochastic dynamics. *New Journal of Physics*, 20(11), 113043 .
- Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE transactions on Information Theory*, 37(1), 145-151 .
- Malevergne\*, Y., Pisarenko, V., & Sornette, D. (2005). Empirical distributions of stock returns: between the stretched exponential and the power law? *Quantitative Finance*, 5(4), 379-401 .
- Manning, C., & Schutze, H. (1999). *Foundations of statistical natural language processing*. MIT press .
- Marcaccioli, R., Bouchaud, J.-P., & Benzaquen, M. (2022). Exogenous and endogenous price jumps belong to different dynamical classes. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2022(2), 023403 .
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2), 125-144 .
- Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(1), 141-142 .
- Namaki, A., & Haghgoo, M. (2021). Detection of Bubbles in Tehran Stock Exchange Using Log-Periodic Power-Low Singularity Model. *Iranian Journal of Finance*, 5(4), 52-63
- Nikakhtar, F., Parkavousi, L., Sahimi, M., Tabar, M. R. R., Feudel, U., & Lehnertz, K. (2023). Data-driven reconstruction of stochastic dynamical equations based on statistical moments. *New Journal of Physics*, 25(8), 083025 .
- Pawula, R. (1967). Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker-Planck equation. *Physical review*, 162(1), 186 .
- Platen, E., & Bruti-Liberati, N. (2010). *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance* (Vol. 64). Springer Science & Business Media .
- Rinn, P., Lind, P. G., Wächter, M., & Peinke, J. (2016). The Langevin approach: An R package for modeling Markov processes. *arXiv preprint arXiv:1603.02036*.
- Risken, H., & Risken, H. (1996). *Fokker-planck equation*. Springer .
- Shiller, R. J. (1981). Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends ?
- Shiller, R. J. (2003). From efficient markets theory to behavioral finance. *Journal of economic perspectives*, 17(1), 83-104 .
- Shiller, R. J. (2014). Speculative asset prices. *American economic review*, 104(6), 1486-1517 .
- Shiller, R. J. (2017). Narrative economics. *American economic review*, 107(4), 967-1004 .
- Tabar, R. (2019). *Analysis and data-based reconstruction of complex nonlinear dynamical systems* (Vol. 730). Springer .

- Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 359-372 .
- Wehrl, A., & Sornette, D. (2022). The excess volatility puzzle explained by financial noise amplification from endogenous feedbacks. *Scientific Reports*, 12(1), 18895 .
- Xu, Y., Li, H., Wang, H., Jia, W., Yue, X., & Kurths, J. (2017). The estimates of the mean first exit time of a bistable system excited by Poisson white noise. *Journal of Applied Mechanics*, 84(9), 091004.