اندازه مکان، اندازه مقياس و مرتب سازي توزيعهاي يک متغيره

عين اله پاشا: دانشگاه تربيت معلم تهران
عادل فاطمي : دانشگاه آزاد اسلامي واحد علوم تحقيقات

چکيده

در اين مقاله مفهوم اندازه مکان و مقياس و تعاريف مربوط به مرتب‌سازي جزئي براي مقايسه توزيعها ارائه و بررسي مي‌شود، و نيز با استفاده از تحدب مرتبه k ، روابط مرتب‌سازي تصادفي و پراکندگي ارائه مي‌شوند. و ثابت مي‌شود که اندازه‌هاي شناخته‌اي مانند ميانگين و انحراف معيار به ترتيب اندازه‌هاي مکان و مقياس‌اند. همچنين تابعي از آنتروپي توزيعها را ارائه مي‌کنيم که اندازه مقياس است و البته اين خود ارتباطي جالب ميان آنتروپي و واريانس توزيعهاي يک متغيره است.

مقدمه

درروابط مرتب سازي، عموماً مجموعه‌اي از توابع مانند U را در نظر مي‌گيريم به قسمي که به ازاي uهاي متعلق به U، $Eu(X)$ ويژگي مورد نظر توزيع را اندازه مي‌گيرد. مرتب سازي بر اساس U اينگونه تعريف مي‌شود:

$$X \leq_u Y \qquad \text{iff} \qquad Eu(X) \leq Eu(Y) \qquad \forall\, u \in U \qquad (۳\text{-}۱)$$

U مي‌تواند مجموعه‌اي از توابع مطلوب باشد.

تعاريف و نمادها

ما توزيع تجمعيF را اکيداً صعودي مي‌گوييم هرگاه روي مجموعه $S_F=\{x : 0< F(x)<1\}$ اکيداً صعودي باشد. در اين بررسي ما تنها متغيرهاي تصادفي مطلقا پيوسته و تابع توزيعهاي اکيداً صعودي را بررسي مي‌کنيم و منظور از يک مدل، مجموعه‌اي از تابع توزيعهاست.

تعريف ۲-۱: به ازاي عدد طبيعي n و مقادير حقيقي y_1، y_2،...، y_n (با همين ترتيب)$S(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ را برابرتغيير علامتy_iها تعريف مي‌کنيم، مثلا اگر $n=4$ آنگاه $S(-2, 1, 1, -3)=2$ اما $S(-2, 1, 1, 3)=1$ همچنين $S(-2, 1, -3, 1)=3$.

حال فرض کنيم f تابعي حقيقي باشد که روي زير مجموعه‌اي ازR مانند I تعريف شده، آنگاه

$$S(f) = \sup S\,[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)]$$

sup روي مجموعه$\{(x_1, x_2,...x_n)|n\in N,\ x_1< x_2<...< x_n\ ,\ \ x_i \in I\ ,\ i =1,2\ ,...\ ,\ n\}$ عمل مي‌کند.
درحقیقت تابع $S(f)$ تعداد دفعاتي را مي‌شمارد که $f(x)$ محور xها را قطع مي‌کند.

مثال۲-۱: اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، $-2 \le x \le 2$ آنگاه $S(f) = 2$ و حال آنکه براي $f(x) = \sin x$، $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ داریم $S(f) = 3$.

واضح است که اگر $f \ge 0$ و یا $f \le 0$ آنگاه $S(f)=0$. گوییم که توابع f و g همدیگر را k مرتبه قطع مي‌کنند، اگر $S(f-g) = k,\ k = 0, 1, 2, \dots$.

تعریف۲-۲: تابع f را محدب مرتبه ۰ گوییم هرگاه به ازاي هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$f(x)\le(\ge)0,$$

و محدب مرتبه ۱ گوییم هرگاه به ازاي هر $x_1, x_2\in I$ و $x_1< x_2$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \ge(\le)\, 0$$

به عبارت دیگر تابع f محدب مرتبه ۱ است هرگاه صعودي و یا نزولي باشد. در حالت کلي تابع f محدب را مرتبه k گوییم هرگاه به ازاي هر $x_1,x_2,\dots,x_{k+1} \in I$ ، $x_1< x_2 <\dots< x_{k+1}$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_{k+1}^{k-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{k+1}) \end{vmatrix} \ge (\le)\, 0 \qquad (2\text{-}1)$$

اگر kامین مشتق f موجود باشد آنگاه f محدب مرتبه k است اگر و فقط اگر $f^{(k)}(x) \ge (\le)\, 0$.

نمادگذاري: فرض F_1 و F_2 دو تابع توزیع باشند، در این صورت:

$$R(x) = R(x; F_1, F_2) = F_2^{-1}(F_1(x)) , \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta(x) = R(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x , \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta^*(x) = R^{-1}(x) - x = F_1^{-1}(F_2(x)) - x , \qquad x \in S_{F2}$$

$$r(x) = r(x; F_1,F_2) = f_1(x) / f_2(F_2^{-1}(F_1(x))) , \qquad x \in S_{F1}$$

که $f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$ و $f_2(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$ به ترتیب چگالي توزیعهاي F_1 و F_2 هستند. تابع R ، تابع جالبي است که مطالعات زیادي بر اساس آن صورت گرفته است. اگر X داراي توزیع F_1 باشد، آنگاه $R(x)$ داراي توزیع F_2 خواهد بود. اگر F_2 توزیعي نمایي با $\lambda = 1$ باشد، آنگاه R تابع خطر است، $R_{(x)} = -\log(1 - F_1(x)) = -\log \overline{F}_1(x)$

و همچنین r تابع میزان از کارافتادگي F_1 است، یعني $r(x) = R'(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ شیوه دیگري از نمایش $r(x)$ به صورت زیر است :

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{1 - F_1(x)} \times \frac{1-F_2(R(x))}{f_2(R(x))} = \frac{\frac{f_1(x)}{F_1(x)}}{\frac{f_2(R(x))}{F_2(R(x))}}$$

این نشان مي‌دهد که درحالت کلي r خارج قسمت توابع میزان از کارافتادگي F_1 و F_2 است. همچنین این نیزقابل توجه است که $r(F_1^{-1}(U)) = \frac{f_1(F_1^{-1}(U))}{f_2(F_2^{-1}(U))}$ که U داراي توزیع یکنواخت پیوسته روي بازه $[0,1]$ است. دراین حالت آنتروپي توزیع F_1 را نیز مي‌توان چنین نوشت:

$$H(F_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) = -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)du \qquad (۲-۲)$$

$$u = F_1(x)$$

تابع $\Delta(x)$ تابع انتقال نیز نامیده مي‌شود زیرا وقتي X به اندازه $\Delta(x)$ انتقال داده مي‌شود داراي توزیعي مشابه توزیع $Y = \Delta(X) + X$ خواهد بود، که همان F_2 است.

حال تعریف زیررا که تعریف مهمي است ارائه مي‌دهیم.

تعریف۲-۳ : فرض کنیم X متغیري تصادفي با تابع توزیع F_1 و Y متغیري تصادفي با تابع توزیع F_2 باشد، گوییم $F_1 \leq_k F_2$ یا به طور معادل $X \leq_k Y$ اگر تابع Δ محدب از مرتبه k باشد، $k = 0, 1, 2, \ldots$.

اندازه مکان

تعریف۳-۱ : توابع توزیع F_1 و F_2 را از نظرمکان مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب مرتبه ۰ (یعني نامنفي) باشند و مي‌نویسیم $F_1 c^\circ F_2$، مدل Ғ را مکاني مي‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall F_1, F_2 \in Ғ \Rightarrow F_1 c^\circ F_2$$

و گوییم F_2 سمت راست F_1 است اگر Δ محدب مرتبه ۰ باشد، یعني $F_1 \leq F_2$.

رابطه c° متقارن و بازگشتي است اما انتقالي نیست. واضح است که $F_1 c^\circ F_2$ اگر و تنها اگر F_1 و F_2 هرگز همدیگررا قطع نکنند، مدل $Ғ = \{F(\circ + a) : a \in R\}$ یک مدل مکاني است، اما همه مدلهاي مکاني اینگونه نیستند.

تابع انتقاليΔ محدب مرتبه ۰،$(\Delta(x) \geq 0)$ است اگر و تنها اگربه ازاي هرx، $F_1(x) \geq F_2(x)$. بنابراین مرتب‌سازي $\leq_0$ همان مرتب‌سازي تصادفي است. رابطه $\leq_0$ یک مرتب‌سازي جزئي درمدل Ғ است، یعني بازگشتي، انتقالي و نامتقارن است. اگر Ғ یک مدل مکاني باشد چون که هر دو عضو Ғ در $\leq_0$ مقایسه پذیرند $(Ғ, \leq_0)$ یک مجموعه مرتب است.

براي یافتن مرتب سازهاي دیگري که براي بررسي مکان مناسب به نظرمي‌رسند باید مرتب‌سازي‌هایي از

نوع (۱-۱) را مطالعه کنيم. براي اين منظور مجموعه توابع زير را در نظر بگيريد:

$$C_1 = \{u : \text{تابعي صعودي و پيوسته } u\}$$

$$C_2 = \{\max(\circ, t) : t \in R\}$$

$$C_3 = \{\min(\circ, t) : t \in R\}$$

قضيه ۳-۱:

$$F_1 \leq_\circ F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_{c_1} F_2 \begin{array}{l} \nearrow F_1 \leq_{c_2} F_2 \\ \searrow F_1 \leq_{c_3} F_2 \end{array}$$

برهان : فرض کنيم که $F_1 \leq_\circ F_2$ و $u \in C_1$ در اين صورت

$$F_1 \leq_0 F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x$$

$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t),$$

$$\Rightarrow u(F_2^{-1}(t)) \geq u(F_1^{-1}(t)),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u(F_2^{-1}(t))dt \geq \int_0^1 u(F_1^{-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dF_2(z) \geq \int_{-\infty}^{\infty} u(z)dF_1(z)$$

$$\Rightarrow Eu(Y) \geq Eu(X) \Rightarrow F_1 \leq c_1 F_2$$

مرتب سازي‌هاي $\leq_{c_2}$ و $\leq_{c_3}$ نيز حالتهاي خاصي از مرتب‌سازي $\leq_{c_1}$اند. براي جهت ديگر به «ستويان ۱۹۷۲» مراجعه شود.

در بخش بعد خواهيم ديد که مرتب‌سازي‌هاي $\leq_{c_2}$ و $\leq_{c_3}$ تنها مکان را اندازه نمي‌گيرد، بلکه مقياس را نيز مي‌سنجد.

تعريف۳-۲ : تابع $\psi: \mathcal{F} \to R$ يک اندازه مکان در $\mathcal{F}$ است هرگاه :

الف) براي هر $a,b \in R$ و $F \in \mathcal{F}$ داشته باشيم:

$$\psi(a \times F + b) = a\psi(F) + b$$

(اگر X داراي توزيع F باشد، آنگاه توزيع $aX + b$ را با $a \times F + b$ نشان مي‌دهيم.)

ب) اگر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq F_2$ آنگاه $\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$.

مثال۳-۱ : $\mathcal{F}$ را يک مدل از توزيعهاي با گشتاور اول متناهي درنظرمي‌گيريم. يعني اگر $X, F \in \mathcal{F}$ داراي توزيعF باشد آنگاه $E(X) < \infty$. دراين صورت$\mu(F) = E(X)$ براي اين خانواده يک اندازه مکان است زيرا اولاً براي هرa , b حقيقي و هر F متعلق به $\mathcal{F}$ داريم:

$$\mu(a \times F + b) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu(F) + b$$

ثانيا اگر $F_۱ ، F_۲ \in Ғ$ و $F_۱ \leq_۰ F_۲$ آنگاه به ازاي هر x متعلق به S_{F_1} داريم:

$$F_۱ \leq_۰ F_۲ \Rightarrow \Delta(x) = F_۲^{-۱}(F_۱(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_۲^{-۱}(F_۱(x)) \geq x$$
$$\Rightarrow F_۲^{-۱}(t) \geq F_۱^{-۱}(t) ,$$
$$\Rightarrow \int_۰^۱ F_۲^{-۱}(t)dt \geq \int_۰^۱ F_۱^{-۱}(t)dt$$
$$\Rightarrow E(Y) \geq E(X) \Rightarrow \mu(F_۲) \geq \mu(F_۱)$$

اندازه مقياس

هدف از اين بخش پاسخ به اين سوال است که کي و چگونه مي‌توان دو توزيع را از نظر مقياس مقايسه کرد. اين سوال مي‌تواند جوابهاي بيشماري داشته باشد که يکي از اين جوابها را در اينجا شرح مي‌دهيم.

تعربف۴-۱: تابع توزيعهاي $F_۲$ و $F_۱$ را درمقياس مقايسه پذيرگوييم هرگاه Δ يا Δ^* محدب از مرتبه ۱ باشند و مي‌نويسيم $F_۲\ c_۱\ F_۱$. مدل Ғ يک مدل مکاني– مقياسي است هر گاه به ازاي $F_۲ \in Ғ$ و $F_۱$ بتوان نتيجه گرفت که $F_۲\ c_۱\ F_۱$. گوييم مقياس$F_۱$ ازمقياس $F_۲$ بزرگترنيست (يا $F_۱$ از$F_۲$ گسترده‌تر نيست). هرگاه Δ محدب مرتبه ۱ (صعودي) باشد، دراين صورت مي‌نويسيم: $F_۱ \leq_۱ F_۲$.

به وضوح رابطه $c^۱$ يک رابطه بازگشتي و متقارن است اما انتقالي نيست. مدل $Ғ = \{F(a ∘ + b): a,b \in R\}$ يک مدل مکاني مقياسي است، اما همه خانواده‌هاي مکاني مقياسي لزوما از اين نوع نيستند. مرتب سازي $\leq_۱$ همان مرتب‌سازي پراکندگي($\leq_{disp}$) معرفي شده توسط «بيکل و لهمن[۱] (۱۹۷۶)» مي‌باشد. آنها چنين بيان کردند که در توزيعهاي $F_۲$ و $F_۱$ که $F_۱$ بيش از $F_۲$ گستره شده است، براي هرu,vي که $۰ < u < v <۱$ داريم:

$$F_۲^{-1}(v) - F_۲^{-۱}(u) \geq F_۱^{-۱}(v) - F_۱^{-۱}(u) \qquad (۱-۴)$$

(اين رابطه به راحتي از محدب مرتبه ۱ بودن $\Delta(x)$ نتيجه مي‌شود) يعني فاصله بين هر دو چندک از توزيع $F_۲$ از فاصله بين چندک‌هاي متناظرآنها از توزيع $F_۱$ بيشتر باشد. همانطور که گفتيم نامساوي (۴-۱) صادق است اگر و تنها اگر$\Delta(x)$ صعودي باشد. بنابراين مرتب سازي $\leq_۱$ و $\leq_{disp}$ يکي هستند.

حال بعضي از خواص $\leq_۱$ را بررسي مي کنيم.

تعريف۴-۲ : گوييم $F_۲ \approx F_۱$ هر گاه $F_۱ \leq_۱$ و $F_۲ \leq_۱$.

قصيه۴-۱ : رابطه $\leq_۱$ انتقالي است و داريم:

$$F_1 \approx_1 F_۲ \Rightarrow \exists a : F(∘) = F_۲(\cdot + a)$$

برهان : تابع توزيعهاي $F_۳$ ، $F_۲$ و $F_۱$ را در نظر بگيريد به طوري که $F_۱ \leq_۱ F_۲$ و $F_۲ \leq_۱ F_۳$. در اين

۱-Bickel & Lehmann (1976)

صورت توابع

$$\Delta_1 (x) = R_1 (x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \qquad \Delta_2 (x) = R_2 (x) - x = F_3^{-1}(F_2(x)) - x ,$$

توابعي صعودي هستند. يعني به ازاي هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ و $y_1, y_2 \in S_{F_1}$ به طوري که $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ داريم:

$$\Delta_1 (x_1) \le \Delta_1 (x_2) \Rightarrow R_1 (x_1) - x_1 \le R_1 (x_2) - x_2 \Rightarrow R_1 (x_2) - R_1 (x_1) \ge x_2 - x_1$$

$$\Delta_2 (y_1) \le \Delta_2 (y_2) \Rightarrow R_2 (y_1) - y_1 \le R_2 (y_2) - y_2 \Rightarrow R_2 (y_2) - R_2 (y_1) \ge y_2 - y_1$$

حال $R_3(x)$ را چنين تشکيل مي‌دهيم:

$$R_3 (x) = R_2(R_1(x)) = F_3^{-1}(F_2(F_2^{-1} (F_1(x))) = F_3^{-1} (F_1(x))$$

دراين صورت به ازاي هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ که $x_1 < x_2$ ، با توجه به دو نامساوي قبلي که به دست آمد داريم:

$$R_3(x_2) - R_3(x_1) = R_2(R_1(x_2)) - R_2(R_1(x_1)) \ge R_1(x_2) - R_1(x_1) \ge x_2 - x_1$$

بنابراين $\Delta_3(x) = R_3 (x) - x$ تابعي صعودي است يعني $F_1 \le_1 F_3$. بعلاوه $\Delta(x) = (F_2^{-1}(F_1 (x))$ صعودي است اگر و تنها اگر

$$\Delta^* (x) = F_1^{-1}(F_2(x)) - x = - \Delta(F_1^{-1}(F_2(x))$$

نزولي باشد. بنابراين:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1 F_2 \;\&\; F_2 \le_1 F_1$$

$\Leftrightarrow$ صعودي $\Delta(x)$ & نزولي $\Delta(x) \Leftrightarrow \exists a \in R : \Delta(x) \equiv a$

$$\Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) - x = a \Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) = a + x$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(a + x).$$

به آساني مي‌توان ديد که $F_1 c^1 F_2$ اگر و تنها اگر به ازاي هر $a \in R$، $S(\Delta(\circ) - a) \le 1$ يعني تابع Δ هيچ خطي موازي محورxها را در بيش از يک نقطه قطع نمي‌کند. و اين بر قرار است از و تنها اگر $F_1(\circ)$ و $F_2 (\cdot + a)$ همديگر را حداکثر در يک نقطه قطع کنند.

حال ما دو نوع ديگر از مرتب‌سازي مقياس $\le^*_1$ ، $\le^{**}_1$ را تعريف مي‌کنيم که از $\le_1$ ضعيف‌تر بوده و براي استفاده ساده ترند.

زماني که $F_1 c^1 F_2$ هر سه نوع مرتب سازي $\le_1$، $\le^*_1$ ، $\le^{**}_1$ منطبق هستند، يعني هم زمان رخ مي‌دهند همچنين مرتب سازي$\le^*$ نسبت به مرتب‌سازي واريانس توزيعها قوي‌تر است، يعني:

$$X \le^*_1 Y \Rightarrow \sigma^2_X \le \sigma^2_Y$$

تعريف۴-۳ : براي توزيعهايF_1 و F_2 مي‌گوييم که $F_1 \le^{**}_1 F_2$ هرگاه اعدادي حقيقي مانند a,b باشند که

$$\Delta(x) \ge b \;; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \le b \;;\quad x< a,$$

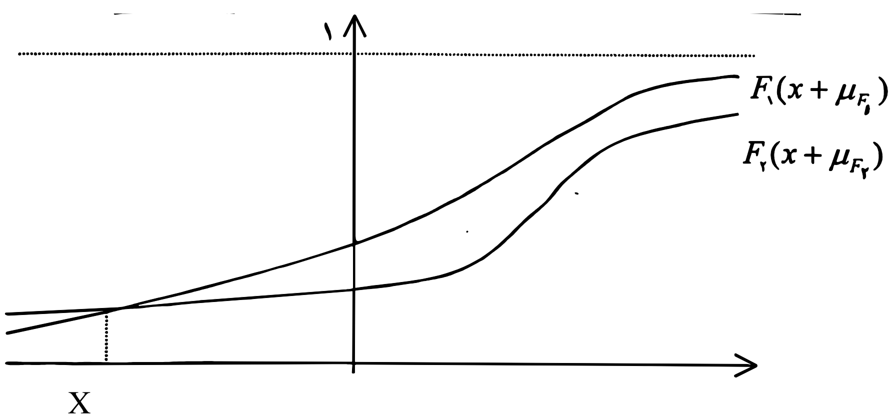
اگر F_2 و F_1 داراي گشتاورهاي اول متناهي μ_{F_2} و μ_{F_1} باشند. خواهيم گفت $F_1 \le_1^{*} F_2$ هرگاه عددي حقيقي مانند a باشد كه

$$\Delta(x) \ge \mu_{F_1}-\mu_{F_2} \;;\quad x > a,$$

$$\Delta(x) \le \mu_{F_1}-\mu_{F_2} \;;\quad x < a$$

(حالت $\le_1^{*}$ حالتي است از $\le_1^{**}$ كه a با $\mu_{F_1}-\mu_{F_2}$ جايگزين شده است.) مرتب سازي $\le_1^{**}$ مي‌تواند اينگونه نيزبه كار رود:

$F_1 \le_1^{**} F_2$ يا $F_2 \le_1^{**} F_1$ هرگاه $b\in R$ ي وجود داشته باشد، به طوري كه $S(F_1(\circ) -F_2 (\circ + b)) = 1$.
يعني براي بعضي از b‌ها تابع توزيعهاي $F_1(\circ)$ و $F_2 (\circ + b)$ همديگر را دقيقاً دريک نقطه قطع مي‌كنند. به‌علاوه $F_1 \le_1^{*} F_2$, $F_1 \le_1^{**} F_2$ هرگاه $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ و $F_2 (\circ + \mu_{F_2})$ همديگر را دقيقاً در يک نقطه قطع كنند. به وضوح درشكل (۴-۱) مي‌توان ديد كه $F_1 \le_1^{*} F_2$ برقرار است، اما $F_1 \le F_2$ برقرار نيست، زيرا اگر $F_2 (\circ + \mu_{F_2})$ را اندكي رو به چپ انتقال دهيم $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ را در دو نقطه قطع خواهد كرد وحال آنكه در مرتب سازي $\le_1$ گفتيم كه F_2 و F_1 را اگر به هر اندازه انتقال دهيم همديگر را حداكثر در يک نقطه قطع مي‌كنند.



شكل ۴-۱: حالتي كه $F_1 \le_1^{*} F_2$ اما $F_1 \le F_2$ برقرار نيست

قضيه ۴-۲ : روابط زير برقرارند:

الف) $F_1 \le F_2 \;(\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Rightarrow F_1 \le_1^{*} F_2 \Rightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$

ب) اگر F_2 و F_1 از نظر مقياس قويا مقايسه پذير باشند، آنگاه

$$F_1 \le F_2 \;(\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Leftrightarrow F_1 \le_1^{*} F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$$

برهان : (الف) چون $F_1 \le_1 F_2$ بنابراين $\Delta(x)$ تابعي صعودي است، پس به ازاي هر x_o دلخواه داريم :

$$X > (<)x_o \Rightarrow \Delta(x) \ge (\le)\; \Delta(x_o)$$

بالاخص براي $x_o = \Delta^{*}\; \mu_{F_1}-\mu_{F_2}$ و

$$x > (<)\Delta^* \ (\mu_{F1}-\mu_{F2}) \Rightarrow \Delta(x) \geq (\leq) \Delta (\Delta^* \ (\mu_{F1}-\mu_{F2})) = \mu_{F1}-\mu_{F2}$$

پس کافي است a را برابر $\Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ بگيريم تا داشته باشيم $F_1 \leq^*_1 F_2$. در رابطه بالا درمورد $\leq^*_1$ اگر $a = \Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ و $b = \mu_{F1}-\mu_{F2}$ ثابت مي شود که $F_1 \leq_1^{**} F_2$

(ب) يک طرف اين رابطه درقسمت قبل ثابت شد حال براي اثبات طرف ديگر فرض مي‌کنيم $F_1 <_1^{**} F_2$ و فرض کنيم که F_2 و F_1 ازنظر مقياس قوياً مقايسه پذيرند. يعني $F_1 \leq_{c1} F_2$ از اينجا نتيجه مي‌شود که Δ تابعي يکنواست و ازتعريف $F_1 \leq_1^{**} F_2$ واضح است که Δ نمي‌تواند نزولي باشد بنابراين صعودي است، پس اين رابطه درست است.

نتيجه ۴-۱: اگر $\mathcal{F}$ يک مدل از توزيعهاي مکاني– مقياس باشد، آنگاه $\leq_1^{**}$ رابطه‌اي انتقالي است و هر دو توزيع از $\mathcal{F}$ نسبت به رابطه $\leq_1^{**}$ مقايسه پذيرند.

حال دو نوع مرتب سازي ديگر از نوع (۱-۱) را که اهميت زيادي دارند، معرفي مي کنيم. مجموعه توابع زير را در نظر بگيريد:

$$S_1 = \{ u : \text{صعودي و محدب } u \},$$

$$S_2 = \{ u : \text{محدب } u \}$$

به کمک قضيه ۳-۱ و به طور مشابه مي‌توان نشان داد که

$$F_1 \leq_{c1} F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_o F_2 \Rightarrow F_1 \leq_{s1} F_2 \qquad (۳-۴)$$

حال فرض کنيم $\mathcal{F}$ مجموعه انتخاب شده و $\leq$ رابطه مرتب‌سازي مقياس براي $\mathcal{F}$ باشد، اندازه مقياس را چنين تعريف مي‌کنيم.

تعريف۴-۴: تابع $\psi : \mathcal{F} \to R$ يک اندازه مقياس است هرگاه

الف) براي هر $F \in \mathcal{F}$ و $a,b \in R$ داشته باشيم:

$$\psi(a\times F + b) = |a|\psi(F_1)$$

ب) اگر $F_1 , F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq F_2$ آنگاه:

$$\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$$

قضيه زيربه اين سوال پاسخ مي‌دهد که چگونه مي‌توان يک اندازه مقياس براي زماني که از $\leq^*_1$ استفاده مي‌کنيم يافت.

قضيه۴-۳: فرض کنيم F_1 و F_2 توزيعهاي Y و X با اميد متناهي μ_{F_2} و μ_{F_1} باشد آنگاه

$$F_1 \leq^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq s_1 F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq s_2 F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

برهان: فرض كنيم X داراي توزيع F_1 و Y داراي توزيع F_2 باشد به طوري كه $F_1 \leq^*_1 F_2$. پس x_oي هست كه براي $x > (<) x_o$ داريم:

$$F_1(x+\mu_{F_1}) \leq (\geq) F_2(x+\mu_{F_2})$$

با توجه به شكل ۳-۱ اگر $t \geq x_o$ آنگاه

$$E\max(X-\mu_{F_1},t) \leq E\max(Y-\mu_{F_1},t)$$

و وقتي $t < x_o$ داريم:

$$E\max(X-\mu_{F_1},t) = t - E\max(X-\mu_{F_1},t) \leq t - E\max(Y-\mu_{F_1},t) = E\max(Y-\mu_{F_1},t)$$

$$\Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq_{c1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

حال ازرابطه(۴-۳) نتيجه مي‌شود $F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq_{s1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$ نهايتا رابطه $F_1(\circ+\mu_{F_1}) \leq_{s1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$ از«استويان[1]» (۱۹۷۲) نتيجه مي شود.

نتيجه ۴-۲: انحراف معيار $\sigma_F = [\int(x-\mu_F)^2 dF(x)]^{\frac{1}{2}}$ اندازه مقياس براي $\leq^*_1$ مي‌باشد. به راحتي مي‌توان ديد كه شرط اول صادق است. شرط دوم نيز از قضيه قبل نتيجه مي‌شود. اگر Ғ را مدل مورد نظر با رابطه $\leq^*_1$ در نظر بگيريم آنگاه به ازاي هر $F_1, F_2 \in$ Ғ داريم $F_1 \leq^*_1 F_2$ يا $F_2 \leq^*_1 F_1$. فرض كنيم $F_1 \leq^*_1 F_2$ آنگاه:

$$F_1 \leq^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F1}) \leq_{s1} F_2(\circ+\mu_{F2})$$
$$\Rightarrow \sigma^2_{F1} = E(X-\mu_{F2})^2 \leq E(Y-\mu_{F2})^2 = \sigma^2_{F2} \qquad (۴-۴)$$
$$\Rightarrow \sigma_{F1} \leq \sigma_{F2}$$

از رابطه (۴-۴) و قضيه ٤-۲ نتيجه مي‌شود كه انحراف معيار يك اندازه مقياس براي مرتب‌سازي پراكندگي (يعني $\leq_1$) نيز مي‌باشد.

بالاخره مطلب قابل اشاره ديگر اين است كه تابع $\sigma_1(F) = e^{H(F)}$ نيز يك اندازه مقياس براي مدل $\mathscr{F}$ با مرتب‌سازي پراكندگي $\leq_1$ مي‌باشد. زيرا:

اولاً، اگر X داراي توزيع F باشد، آنگاه

$$\forall a,b \in R, F \in \text{Ғ} \quad \sigma_1(a\times F+b) = e^{H(aX+b)} = e^{[\log|a| + H(X)]} = e^{\log|a|}e^{H(X)} = |a|\sigma_1(F)$$

و ثانيا با فرض F_1 ، $F_2 \in$ Ғ و $F_1 \leq_1 F_2$ داريم:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \text{صعودي } \Delta(x) \Leftrightarrow r(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(F_1^{-1}(u))}{f_2(F_1^{-1}(u))} \geq 1$$
$$f_1(F_1^{-1}(u)) \geq f_2(F_2^{-1}(u)) \Leftrightarrow \log F_1(F_1^{-1}(u)) \geq \log f_2(F_2^{-1}(u))$$
$$\Leftrightarrow -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u))du \leq -\int_0^1 \log f_2(F_2^{-1}(u))du$$

---
[1]-Stoyan

$$\Leftrightarrow -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x)dF_1(x) \leq -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_2(x)dF_2(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad H(F_1) \leq H(F_2) \Leftrightarrow \sigma_1(F_1) \leq \sigma_1(F_2)$$

تشکر و قدرداني

در پایان به جاست از آقاي دکتر احسان‌اله صوفي استاد دانشگاه ویسکانسین میلواکي آمریکا بـه خـاطر ارسـال تعدادي از مقالات که بسیار مفید و با ارزش بودند سپاسگذاري کنیم.

مراجع

1. P.j. Bickel and E.L. Lehmann, Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion, Ann. Statist, Spread, Manuscript, 4 (1976) 1139-1159; IV.
2. E. Ebrahimi, E. Maasoumi, E.S. Soofi, Ordering univareate distributions by entropy and variance. Journal of Econometrics 90 (1999) 317-336.
3. H.on Oja, Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, Scand. J. Sataist, 8 (1981)154-168.
4. M. Shaked, J.G. Shantikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York(1994).
5. D. Stoyan, Uber Einige Eigenschafton Monoton Stochastischer Prozesse Math, Nachr, 52 (1972) 21-034.