

بعضی چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر بر روی \mathbb{Q}

حسین صدیقی

عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

چکیده

هدف این مقاله یافتن دسته‌هایی از چند جمله‌ایهای عضو $\mathbb{Q}[x]$ است که روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیرند و در پایان شبکه‌ای از زیرگروه‌های یک چند جمله‌ای روی \mathbb{Q} و شبکه‌ای از زیرمیدانهای میدان تجزیه‌ای آن چند جمله‌ای روی \mathbb{Q} جهت مقایسه این دو شبکه رسم شده است.

چنانچه E/F یک میدان توسیعی و $\alpha \in E$ روی F جبری باشد آنگاه تابع

$$\phi_\alpha : F[x] \rightarrow F(\alpha) \\ f(x) \mapsto f(\alpha)$$

یک هم‌ریختی است. با توجه به جبری بودن α روی F هسته این هم‌ریختی یک ایده‌آل ناصفر $F[x]$ است که به وسیله یک چند جمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر منحصر بفرد $p(x) \in F[x]$ تولید می‌شود، $p(x)$ را چند جمله‌ای مینیمال یا چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر α روی F می‌نامند و $[F(\alpha) : F] = \deg(p(x))$.

اگر E/F توسیع میدان تجزیه‌ای چند جمله‌ای ناصفر f باشد آنگاه

$$\text{Gal}_F(f) = \{ \phi : E \rightarrow E \mid \phi \text{ یک خودریختی است که هر عضو } F \text{ را ثابت نگه می‌دارد} \}.$$

اگر $H \subseteq \text{Gal}_F(f)$ یک زیرمجموعه دلخواه باشد آنگاه

$$\phi(H) = \{ \alpha \in E \mid \forall \sigma \in H (\sigma(\alpha) = \alpha) \}$$

یک زیرمیدان E می‌باشد که شامل F است. به عکس اگر K زیرمیدانی از E و شامل F باشد آنگاه $\{\sigma \in \text{Gal}_F(f) \mid \forall k \in K(\sigma(k) = k)\}$ زیرگروهی از $\text{Gal}_F(f)$ است. چنانچه:

$$A = \{K \mid K \text{ زیرمیدانی از } E \text{ که شامل } F \text{ است}\},$$

$$B = \{H \mid H \text{ یک زیرگروه از } \text{Gal}_F(f) \text{ است}\},$$

آنگاه تابع $(1) \psi: B \rightarrow A$ با ضابطه $\psi(H) = \phi(H)$ یک تناظر یک‌به‌یک است.

فرض کنید p, q دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که $q \neq (p, q) \neq p$ و $f = (x^2 - p)(x^2 - q)$ این صورت $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})/Q$ یک توسیع میدان تجزیه‌ای f است.

$$Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \{a_0 + a_1\sqrt{p} + a_2\sqrt{q} + a_3\sqrt{pq} \mid a_i \in Q\}$$

$$|\text{Gal}_Q(f)| = [Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : Q] = 4.$$

با فرض $\text{Gal}_Q(f) = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ هر یک از σ_i ($0 \leq i \leq 3$) یک خودریختی روی $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ است که هر عضو Q را ثابت نگاه میدارند. برای مشخص کردن یک خودریختی روی $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ کافی است $\sigma(\sqrt{p})$ و $\sigma(\sqrt{q})$ را معین نماییم. از آنجا که $\sigma(\sqrt{p}) = \pm\sqrt{p}$ و $\sigma(\sqrt{q}) = \pm\sqrt{q}$ نتیجه می‌شود که اعضای $\text{Gal}_Q(f)$ به شرح زیر می‌باشند

$$\sigma_0: \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_1: \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_2: \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \end{cases}, \quad \sigma_3: \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \end{cases}$$

بنابراین $\text{Gal}_Q(f)$ دارای زیرگروه‌های

$$H_0 = \{\sigma_0\}, \quad H_1 = \{\sigma_0, \sigma_1\}, \quad H_2 = \text{Gal}_Q(f), \quad H_3 = \{\sigma_0, \sigma_2\}, \quad H_4 = \{\sigma_0, \sigma_3\}.$$

در نتیجه زیرمیدانهای متناظر H_i ها بنابر رابطه (۱) که تمام زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ نیز می‌باشند به شرح زیر می‌باشند:

$$\phi(H_0) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$$

$$\phi(H_1) = Q(\sqrt{q}), \quad \phi(H_2) = Q(\sqrt{p}), \quad \phi(H_3) = Q(\sqrt{pq})$$

لم ۱: اگر a, b اعداد گویای ناصفر و p, q دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که $q \neq (p, q) \neq p$ آنگاه $\alpha = a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$ $Q(\alpha) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.

برهان: چون α به هیچیک از زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p})$ ، $Q(\sqrt{q})$ ، $Q(\sqrt{pq})$ و Q تعلق ندارد، و $Q(\alpha)$ زیرمیدانی از $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ است که با هیچیک از این چهار زیرمیدان برابر نیست پس $Q(\alpha) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. \blacktriangle

قضیه ۲: اگر p, q دو عدد صحیح و مثبت و خالی از مربع باشند به قسمی که λp و λq و a, b اعداد گویای ناصفر باشند آنگاه چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 2(a^2p + b^2q)x^2 + (a^2p - b^2q)^2$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با فرض $\alpha = a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$ بنا بر لم یک داریم $Q(\alpha) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. بنابراین $[Q(\alpha) : Q] = [Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : Q] = 4$. در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال α روی \mathbb{Q} از درجه ۴ می‌باشد. لذا اگر $g(x) \in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که

$$\deg(g(x)) \geq 2 \quad \alpha = g(\alpha) \quad (2)$$

$$\alpha = a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$$

$$\alpha^2 = a^2p + b^2q + 2ab\sqrt{pq}$$

$$\alpha^2 - (a^2p + b^2q) = 2ab\sqrt{pq}$$

$$\alpha^4 + (a^2p + b^2q)^2 - 2(a^2p + b^2q)\alpha^2 = 4a^2b^2pq$$

$$\alpha^4 - 2(a^2p + b^2q)\alpha^2 + (a^2p - b^2q)^2 = 0$$

بنابراین α صفر $f(x)$ می‌باشد. از این که چندجمله‌ای مینیمال α در \mathbb{Q} از درجه ۴ می‌باشد نتیجه می‌شود که $f(x)$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است. چه در غیر این صورت α صفر یک چندجمله‌ای از درجه کوچکتر از ۴ روی \mathbb{Q} می‌باشد که با (۲) تناقض دارد. \blacktriangle

نتیجه یک: اگر p, q دو عدد خالی از مربع باشند به قسمی که λp و λq آنگاه چندجمله‌ای $g(x) = x^2 - 2(p+q)x^2 + (p-q)^2$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با قراردادن $a = b = 1$ در قضیه ۲ نتیجه حاصل می‌شود. \blacktriangle

نتیجه ۲: اگر p, q دو عدد طبیعی خالی از مربع باشند به قسمی که λp و λq و a یک عدد گویای ناصفر باشد آنگاه چندجمله‌ای $h(x) = x^2 - 2(p+q)a^2x^2 + a^2(p-q)^2$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.

برهان: با قراردادن $a = b$ در قضیه ۲ نتیجه حاصل می‌شود. \blacktriangle

قضیه ۳: اگر m عددی صحیح و مثبت و مربع کامل نباشد (یعنی عددی اول چون p وجود دارد که $p^k | m$ و $p^{k+1} \nmid m$ و k فرد است) آنگاه چندجمله‌ای $t(x) = x^2 - 2(m-1)x^2 + (m+1)^2$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.

برهان: $Q(i, \sqrt{m}) = Q(i + \sqrt{m})$: لذا

$$[Q(i + \sqrt{m}) : Q] = [Q(i, \sqrt{m}) : Q] = ۴$$

بنابراین چندجمله‌ای مینیمال $i + \sqrt{m}$ روی Q از درجه ۴ می‌باشد. در نتیجه اگر $s(x) \in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $s(i + \sqrt{m}) = 0$ آنگاه $\deg(s(x)) \geq ۴$. با فرض

$$\alpha = i + \sqrt{m},$$

$$\alpha^2 = -۱ + m + ۲i\sqrt{m},$$

$$\alpha^2 + (۱ - m)^2 + ۲(۱ - m)\alpha^2 = -۴m,$$

$$\alpha^2 + (۱ - m)^2 + ۲(۱ - m)\alpha^2 = -۴m,$$

$$\alpha^2 + ۲(۱ - m)\alpha^2 + (m + ۱)^2 = 0.$$

بنابراین α صفر چندجمله‌ای $t(x)$ می‌باشد. در نتیجه $t(x)$ روی Q تحویل‌ناپذیر است چه در غیر این صورت α صفر یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر ۳ می‌باشد که غیرممکن است. \blacktriangle

فرض کنید p, q و t سه عدد اول دوه‌دو متمایز باشند و $f = (x^2 - p)(x^2 - q)(x^2 - t)$. در این صورت $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})/Q$ توسیع میدان تجزیه‌ای f روی Q است.

$$Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}) = \{a + b_1\sqrt{p} + b_2\sqrt{q} + b_3\sqrt{t} + c_1\sqrt{pq} + c_2\sqrt{pt} + c_3\sqrt{qt} + d\sqrt{pqt} \mid a, b_i, c_i, d \in Q\},$$

$$\text{Gal}_Q(f) = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7\}.$$

اگر $\sigma \in \text{Gal}_Q(f)$ آنگاه برای هر $q \in Q$ داریم $\sigma(q) = q$. لذا برای مشخص کردن یک خودریختی $\sigma : Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}) \rightarrow Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$ کافی است $\sigma(\sqrt{p}), \sigma(\sqrt{q})$ و $\sigma(\sqrt{t})$ را معین کنیم. از آنجا که $\sigma(\sqrt{p}) = \pm\sqrt{p}$ و $\sigma(\sqrt{q}) = \pm\sqrt{q}$ و $\sigma(\sqrt{t}) = \pm\sqrt{t}$ نتیجه می‌شود که σ عضو $\text{Gal}_Q(f)$ به شرح زیر است:

$$\sigma_0 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \sigma_1 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \sigma_2 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \sigma_3 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow -\sqrt{t} \end{cases}$$

$$\sigma_4 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow \sqrt{t} \end{cases}, \sigma_5 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow \sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow -\sqrt{t} \end{cases}, \sigma_6 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow \sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow -\sqrt{t} \end{cases}, \sigma_7 : \begin{cases} \sqrt{p} \rightarrow -\sqrt{p} \\ \sqrt{q} \rightarrow -\sqrt{q} \\ \sqrt{t} \rightarrow -\sqrt{t} \end{cases}$$

بنابراین $[Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}) : Q] = |\text{Gal}_Q(f)| = 8$.
 لذا $\text{Gal}_Q(f)$ دارای ۱۶ زیرگروه به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{\sigma_0\}, H_1 = \{\sigma_0, \sigma_1\}, H_2 = \{\sigma_0, \sigma_2\}, H_3 = \{\sigma_0, \sigma_3\}, H_4 = \{\sigma_0, \sigma_4\} \\ H_5 &= \{\sigma_0, \sigma_5\}, H_6 = \{\sigma_0, \sigma_6\}, H_7 = \{\sigma_0, \sigma_7\}, H_8 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \\ H_9 &= \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_5\}, H_{10} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_6, \sigma_7\}, H_{11} = \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_6\}, \\ H_{12} &= \{\sigma_0, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_7\}, H_{13} = \{\sigma_0, \sigma_3, \sigma_6, \sigma_7\}, H_{14} = \{\sigma_0, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}, \\ H_{15} &= \text{Gal}_Q(f). \end{aligned}$$

فرض کنید $A = \{H_i \mid 0 \leq i \leq 15\}$ و $B = \{K \mid Q \leq K \leq Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})\}$ و

$$\psi : A \rightarrow B.$$

$$H_i \rightsquigarrow \phi(H_i)$$

و a, b, c اعداد گویای ناصفری باشند و $\alpha = a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{t}$. در این صورت $Q(\alpha)$ زیرمیدانی از $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$ است و برای هر $(1 \leq i \leq 15)$ ، $\alpha \notin \phi(H_i)$ ، زیرا برای هر چنین i زیرگروه H_i عضوی دارد که α را روی خودش تصویر نمی‌کند. بنابراین $(1 \leq i \leq 15)$ ، $Q(\alpha) \neq \phi(H_i)$ و در نتیجه $Q(\alpha) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$. لذا

$$[Q(\alpha) : Q] = [Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}) : Q] = 8.$$

بنابراین چند جمله‌ای مینیمال α روی Q از درجه ۸ می‌باشد. در نتیجه اگر $g(x) \in Q[x]$ یک چند جمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $g(\alpha) = 0$ آنگاه $\deg(g(x)) \geq 8$.

قضیه ۴: اگر p, q, t سه عدد اول دوه‌دو متمایز باشند آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= x^8 - 4(p+q+t)x^6 + 2[(p+q+t)^2 + 2(p^2+q^2+t^2)]x^4 \\ &\quad - 4[(p+q+t)(p^2+q^2+t^2) - 2pq - 2pt - 2qt]x^2 \\ &\quad + (p^2+q^2+t^2 - 2pq - 2pt - 2qt)^2. \end{aligned}$$

روی Q تحویل‌ناپذیر است.

برهان: بنابر بحث‌های قبل از قضیه ۴ اگر $\gamma = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{t}$ آنگاه $Q(\gamma) = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$. بنابراین $[Q(\gamma) : Q] = 8$ و در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال γ روی Q از درجه ۸ می‌باشد. لذا اگر $h(x) \in Q[x]$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد به قسمی که $h(\gamma) = 0$ آنگاه $\deg(h(x)) \geq 8$.

$$\gamma = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{t},$$

$$\gamma - \sqrt{p} = \sqrt{q} + \sqrt{t},$$

$$\gamma^2 + p - 2\gamma\sqrt{p} = q + t + 2\sqrt{qt},$$

$$(\gamma^2 + p - q - t)^2 = 4(\gamma\sqrt{p} + \sqrt{qt})^2,$$

$$\gamma^4 + 2(p - q - t)\gamma^2 + (p - q - t)^2 = 4(\gamma^2 p + qt + 2\gamma\sqrt{pq}),$$

$$\gamma^4 - 2(p + q + t)\gamma^2 + (p^2 + q^2 + t^2 - 2pt - 2pq - 2qt) = 8\gamma\sqrt{pqt}.$$

$$\gamma^8 - 4(p + q + t)\gamma^6 + [2(p^2 + q^2 + t^2 - 2pq - 2pt - 2qt) + 4(p + q + t)^2]\gamma^4$$

$$- [4(p + q + t)(p^2 + q^2 + t^2 - 2pq - 2pt - 2qt) + 64pqt]\gamma^2$$

$$+ (p^2 + q^2 + t^2 - 2pq - 2pt - 2qt) = 0.$$

بنابراین γ صفر $f(x)$ است. از این که چندجمله‌ای مینیمال γ روی Q از درجه ۸ می‌باشد نتیجه می‌شود که $f(x)$ روی Q تحویل‌ناپذیر است. چه در غیراین صورت γ صفر یک چندجمله‌ای از درجه کوچکتر از ۸ می‌باشد که غیرممکن است. ▲

با فرض $K_i = \phi(H_i)$, $(0 \leq i \leq 15)$ خواهیم داشت

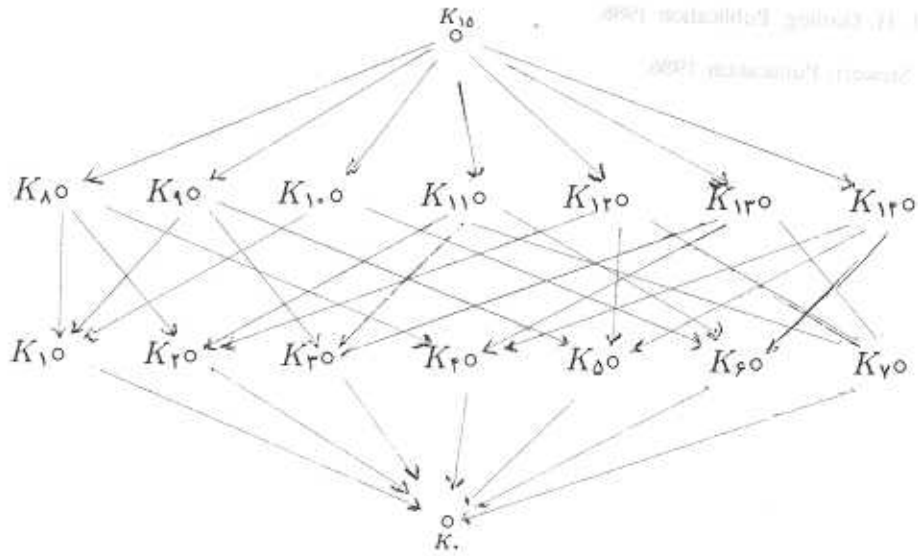
$$K_0 = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t}), K_1 = Q(\sqrt{q}, \sqrt{t}), K_2 = Q(\sqrt{p}, \sqrt{t}), K_3 = Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$$

$$K_4 = Q(\sqrt{t}, \sqrt{pq}), K_5 = Q(\sqrt{q}, \sqrt{pt}), K_6 = Q(\sqrt{p}, \sqrt{qt}), K_7 = Q(\sqrt{pq}, \sqrt{pt}, \sqrt{qt}),$$

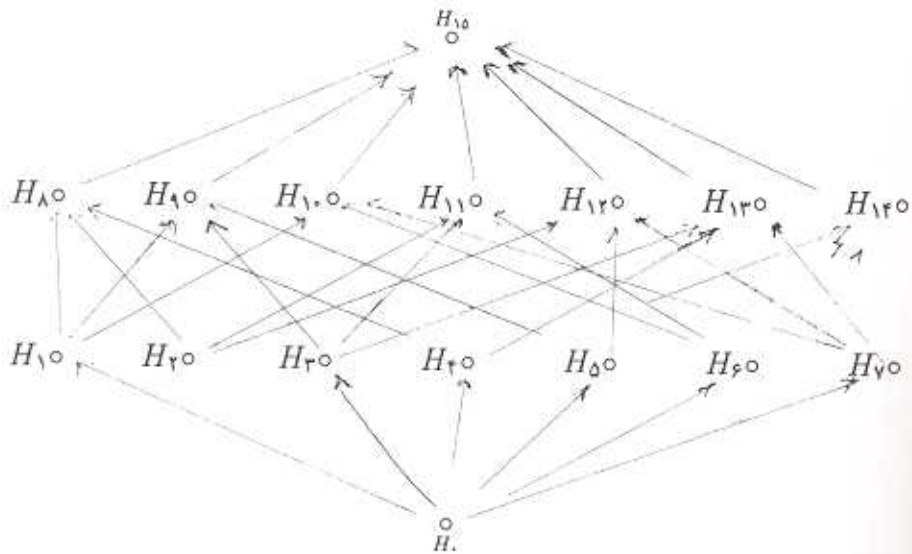
$$K_8 = Q(\sqrt{t}), K_9 = Q(\sqrt{q}), K_{10} = Q(\sqrt{qt}), K_{11} = Q(\sqrt{p}), K_{12} = Q(\sqrt{pt})$$

$$K_{13} = Q(\sqrt{pq}), K_{14} = Q(\sqrt{pqt}), K_{15} = Q.$$

در صفحه بعد شبکه زیرگروه‌های $\text{Gal}_Q(f)$ و شبکه زیرمیدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$ را جهت مقایسه نشان می‌دهیم.



شبکه زیر میدانهای $Q(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{t})$



شبکه زیر گروههای $Gal_Q(f)$

References:

- [1]. Galois Theory, Joseph Rotman, Publication 1990.
- [2]. Galois Theory, D. J. H. Garling, Publication 1986.
- [3]. Galois Theory, Ian Stewart, Publication 1986.