

## تکمیل آزمون نیکویی برآزش برای توزیع چوله نرمال بر اساس تابع مولد گشتاور تجربی

محمد مهدی مقامی، نصراله ایران‌پناه\*؛ دانشگاه اصفهان، گروه آمار

### چکیده

تاکنون روش‌های مختلفی برای آزمون نیکویی برآزش توزیع چوله نرمال مطرح شده است. در این مقاله روش مینتانیس [۸] که بر اساس تابع مولد گشتاور تجربی است، بررسی می‌شود. این آزمون به‌طور مجزا برای پارامتر شکل معلوم و مجهول مطرح می‌شود. مینتانیس ادعا کرده است آزمون او از نظر توان با آزمون کلموگروف-اسمیرنوف قابل رقابت است. اما این ادعا تنها برای پارامتر شکل معلوم درست است. در این مقاله روشی برای یافتن آماره آزمون ارائه شده است که علاوه بر زمان کمتر، توان آزمون مینتانیس را نیز به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌دهد. در این روش برای یافتن سوپریمم، به‌جای محاسبه تابع روی شبکه، از تابع اپتیمم استفاده می‌شود. مینتانیس برای پارامتر معلوم اندازه آزمون خود را بررسی نکرده است که در این مقاله بررسی شده است.

### آماره آزمون

اگر  $Z_\lambda$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(z; \lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z)$  باشد،  $Z_\lambda$  را یک متغیر تصادفی چوله نرمال استاندارد با پارامتر چولگی  $\lambda$  می‌نامیم (آزالینی [۱]). در این تعریف  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  به ترتیب توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد هستند. اگر ترکیب خطی  $Y = \mu + \sigma Z_\lambda$  را در نظر بگیریم، می‌گوییم  $Y$  دارای توزیع چوله نرمال با پارامترهای  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  و  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  است و با نماد  $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  نمایش می‌دهیم.

می‌خواهیم آزمون فرض صفر برای برخی  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$   $H_0: Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  که در آن مقدار ثابت و معلومی از مقادیر  $\lambda$  است، یا در حالت کلی‌تر، فرض صفر برای برخی

$$\tilde{H}_0: Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda) \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

که در آن  $\lambda$  نامعلوم است را در برابر فرض مقابل دل‌خواه انجام دهیم. فرض کنید  $M(t) = E[\exp(tY)]$ ،  $t \in \mathbb{R}$  تابع مولد گشتاور  $Y$  باشد. اگر  $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  آن‌گاه تابع

$$M_g(\mu, \sigma; t) = 2e^{\mu t + (\sigma^2 t^2 / \lambda)} \Phi(\sigma g t)$$

مولد گشتاور  $Y$  با در نظر گرفتن پارامتر  $g = \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2}$  به صورت

واژه‌های کلیدی: چولگی، آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، بوت استرپ پارامتری، شبیه‌سازی مونت کارلو

پذیرش ۹۱/۱۰/۵

دریافت ۹۰/۵/۲۵

\*نویسنده مسنول iranpanah@stat.ui.ac.ir

به دست می آید. با توجه به این که  $M_g(\cdot, 1; t) = \gamma e^{t^2/\gamma} \Phi(\mathcal{G}t)$  در معادله دیفرانسیلی

$$M'(t) - tM(t) - \mathcal{G} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{\gamma}(1 - \mathcal{G}^2)\right] = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

به شرط  $M(0) = 1$  صدق می کند، آزمون نیکویی برآزش را بدین روش انجام می دهیم: فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه تصادفی از توزیع چوله نرمال باشد. برای آزمون فرض  $H_0$  تابع مولد گشتاور تجربی

$$\hat{M}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(t\hat{X}_j) \quad (2)$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $\hat{X}_j = (Y_j - \hat{\mu}_n) / \hat{\sigma}_n, j=1, 2, \dots, n$  و  $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$  برآوردگرهای سازگار  $(\mu, \sigma)$  هستند. تحت فرض  $H_0$  برای  $n$  های بزرگ  $\{\hat{X}_j\}_{j=1}^n$  تقریباً دارای توزیع  $SN(0, 1; \lambda)$  است، بنا بر این

انتظار داریم عبارت

$$D_n(t) = \hat{M}'_n(t) - t\hat{M}_n(t) - \mathcal{G} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{\gamma}(1 - \mathcal{G}^2)\right] \quad (3)$$

نزدیک صفر باشد که در آن  $\mathcal{G} = \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2}$  است. بنا بر این برای آزمون فرض  $H_0$ ، از میزان انحراف (3) از صفر استفاده می شود. آزمون فرض  $\tilde{H}_0$  بر اساس اندازه انحراف

$$\tilde{D}_n(t) = \hat{M}'_n(t) - t\hat{M}_n(t) - \tilde{\mathcal{G}} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{\gamma}(1 - \tilde{\mathcal{G}}^2)\right] \quad (4)$$

از صفر انجام می شود، که در آن  $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\lambda}_n / \sqrt{1 + \tilde{\lambda}_n^2}$  و  $\tilde{\lambda}_n$  یک برآوردگر سازگار  $\lambda$  است. انتظار داریم در مواقعی که این روش میسر است آزمون ارائه شده از لحاظ کارایی با آزمون های بر اساس تابع توزیع تجربی، مانند آزمون کلموگروف-اسمیرنوف قابل رقابت باشد. به علاوه، آزمون جدید در مواقعی که آزمون های کلاسیک بر اساس تابع توزیع تجربی پیچیده اند به آسانی اجرا می شود.

با توجه به آن که در آماره های آزمون (3) و (4)،  $t$  مقدار مجهولی است، یک روش برای محاسبه تابع مولد گشتاور تجربی انتخاب توافقی یک بردار  $t_n$  (کلارک و همکاران [2]) و یا یک شبکه متناهی از نقاط  $t_j$  (ایپس و همکاران [3]) است. بنا بر این آماره های

$$T_{n,a} = \sqrt{n} \sup_{-a \leq t \leq a} |D_n(t)|$$

در آزمون  $H_0$ ،  $a > 0$ ، برای برخی

$$\tilde{T}_{n,a} = \sqrt{n} \sup_{-a \leq t \leq a} |\tilde{D}_n(t)|$$

در آزمون  $\tilde{H}_0$ ،  $a > 0$ ، برای برخی

را به کار می بریم.

### سازگاری آزمون ها

برای آزمون مورد نظر فرض می کنیم نه تنها تحت فرض صفر، بلکه تحت هر فرض ثابت در مقابل  $H_0$  داشته باشیم  $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n, \hat{\lambda}_n) \xrightarrow{P} (\mu, \sigma, \lambda)$  که در آن پارامترهای مجهول جامعه اند. به عبارت دیگر،

برآوردگرها سازگارند و برای انجام آزمون از برآوردگرهای گشتاوری استفاده می‌کنیم. برای آزمون فرض  $H_0$  با  $\lambda = \lambda_0$  معلوم و با فرض این‌که تحت فرض مقابل ثابت  $E(Y^2) < \infty$ ، خواهیم داشت

$$E(Y) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varrho, \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \varrho^2 \right) \quad (5)$$

از حل معادلات (5) داریم:

$$\mu = E(Y) - \sigma \sqrt{2/\pi} \varrho, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}(Y)}{1 - (2/\pi) \varrho^2}}$$

بنا بر این برآوردگرهای گشتاوری  $\mu$  و  $\sigma$  به صورت

$$\hat{\mu}_n = \bar{Y}_n - \hat{\sigma}_n \sqrt{2/\pi} \varrho, \quad \hat{\sigma}_n = \frac{S_n}{\sqrt{1 - (2/\pi) \varrho^2}} \quad (6)$$

ارائه می‌گردند، که در آن  $\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n Y_j$  و  $S_n^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2$  به ترتیب میانگین و واریانس نمونه

هستند. همچنین برای انجام آزمون فرض  $\tilde{H}_0$  که در آن  $\lambda$  مجهول است، برای وجود برآوردگرهای گشتاوری باید  $E(|Y^3|) < \infty$  باشد. سازگاری آزمون کلی  $\tilde{T}_{n,a}$  را بررسی می‌کنیم. آزمون  $T_{n,a}$  حالت خاصی از  $\tilde{T}_{n,a}$  است. چون آزمون مطرح شده برای مقادیر بزرگ  $\tilde{T}_{n,a}$  فرض  $\tilde{H}_0$  را رد می‌کند، این قضیه ارائه می‌شود

(مینتانیس [8]):

**قضیه:** آزمون نیکویی برآزشی که برای مقادیر بزرگ آماره  $\tilde{T}_{n,a}$  فرض  $\tilde{H}_0$  را رد کند، سازگار است.

**اثبات:** برای اثبات سازگاری آزمون بر اساس آماره  $T_{n,a}$  باید نشان دهیم

$$\tilde{T}_{n,a} = \sqrt{n} \sup_{-a \leq t \leq a} |\tilde{D}_n(t)| \xrightarrow{P} \infty.$$

اگر  $\sup_{-a \leq t \leq a} |\tilde{D}_n(t)| \xrightarrow{P} \tilde{\Delta}$ ،  $\tilde{\Delta}$  باید مثبت باشد، مگر برای وقتی که

$$-a \leq t \leq a, \quad \tilde{D}_n(t) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{برای تمام} \quad (7)$$

از طرفی با استفاده از (2) داریم

$$\begin{aligned} \hat{M}_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(t \hat{X}_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp \left[ t (Y_j - \hat{\mu}_n) / \hat{\sigma}_n \right] \\ &= \exp(-t \hat{\mu}_n / \hat{\sigma}_n) \times \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(t Y_j / \hat{\sigma}_n) \\ &= \exp(-t \hat{\mu}_n / \hat{\sigma}_n) \times M_n(t / \hat{\sigma}_n) \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\hat{M}'_n(t) = \frac{1}{\hat{\sigma}_n} \exp(-t \hat{\mu}_n / \hat{\sigma}_n) \times \left( \hat{M}'_n(t / \hat{\sigma}_n) - \hat{\mu}_n M_n(t / \hat{\sigma}_n) \right)$$

که در آن  $M_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(tY_j)$  تابع مولد گشتاور تجربی  $Y$  است. بنا بر این با توجه به (۴) و

سازگاری یکنواخت تابع مولد گشتاور تجربی و مشتق آن روی بازه کران دار از اعداد حقیقی [۴] و همچنین سازگاری برآوردهای  $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$  برای پارامترهای مجهول  $(\mu, \sigma)$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\hat{M}_n(t) = \exp(-t\hat{\mu}_n / \hat{\sigma}_n) \times M_n(t / \hat{\sigma}_n) \xrightarrow{P} e^{-(\mu/\sigma)t} M(t / \sigma)$$

که در آن  $M(t)$  تابع مولد گشتاور  $Y$  است. به همین ترتیب

$$\hat{M}'_n(t) = \frac{1}{\hat{\sigma}_n} \exp(-t\hat{\mu}_n / \hat{\sigma}_n) \times (\hat{M}'_n(t / \hat{\sigma}_n) - \hat{\mu}_n M_n(t / \hat{\sigma}_n)) \xrightarrow{P} \frac{1}{\sigma} e^{-(\mu/\sigma)t} (M'(t / \sigma) - \mu M(t / \sigma))$$

در نتیجه

$$\hat{M}'_n(t) - t \hat{M}_n(t) \xrightarrow{P} \frac{1}{\sigma} e^{-(\mu/\sigma)t} (M'(t / \sigma) - (\mu + \sigma t) M(t / \sigma)) \quad (۸)$$

اکنون برای متغیر تصادفی  $X$  با تابع مولد گشتاور  $m(t) = E(e^{tX})$  داریم  $Y = \mu + \sigma X$ . بنا بر این

$$M(t) = e^{\mu t} m(\sigma t)$$

$$M(t / \sigma) = e^{(\mu/\sigma)t} m(t) \quad ( / \sigma) = (\mu/\sigma)t \quad ( \sigma \quad ' ( \text{mpmetM} ) \quad (۹)$$

با جای‌گذاری رابطه (۹) در سمت راست رابطه (۸) داریم:

$$\hat{M}'_n(t) - t \hat{M}_n(t) \xrightarrow{P} m'(t) - t m(t) \quad (۱۰)$$

با استفاده از (۱۰) چون  $\tilde{g}_n \xrightarrow{P} g$  پس

$$\hat{M}'_n(t) - t \hat{M}_n(t) - \tilde{g}_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{2}(1 - \tilde{g}_n)\right] \xrightarrow{P} m'(t) - t m(t) - g \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{2}(1 - g)\right]$$

بنا بر این

$$\tilde{D}_n(t) \xrightarrow{P} \tilde{D}(t) \quad (۱۱)$$

که در آن  $\tilde{D}(t) = m'(t) - t m(t) - g \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[\frac{t^2}{2}(1 - g)\right]$ . اگر  $\tilde{\Delta} = 0$ ، باید رابطه (۷) برقرار باشد و در

نتیجه بنا به (۱۱) باید  $\tilde{D}(t) = 0$ . از طرفی چون  $M_g(0, 1; t)$  جواب یکتای معادله (۱) است، تنها در

صورتی  $\tilde{D}(t) = 0$  است که  $m(t) = M_g(0, 1; t)$ . اکنون با استفاده از یکتایی تابع مولد گشتاور نتیجه می‌گیریم

که  $X \sim SN(\lambda)$ . بنا بر این فقط زمانی  $\tilde{\Delta} = 0$  است که  $X \sim SN(0, 1; \lambda)$  و یا

$Y = \mu + \sigma X \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  باشد و در غیر این صورت  $\tilde{\Delta} > 0$  است. در نتیجه برای هر فرض مقابل با

تابع مولد گشتاور متناهی،  $\tilde{T}_{n,a} = \sqrt{n} \sup_{-a \leq t \leq a} |\tilde{D}_n(t)| \xrightarrow{P} \infty$  و اثبات کامل است.

## شبیه‌سازی

در این بخش در بررسی شبیه‌سازی برای آزمون‌ها دو حالت پارامتر شکل معلوم و نامعلوم را در توزیع چوله نرمال در نظر می‌گیریم.

### ۱. آزمون نیکویی برآزش در حالت $\lambda$ معلوم

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای آزمون  $T_{n,a}$ ، آزمون کلموگروف-اسمیرنف ( $KS$ ) و روش جدید را مقایسه می‌کنیم. در حالت خاص با نمونه‌هایی به اندازه  $n = 20, 50$  برای متغیرهای تصادفی استاندارد شده  $\hat{X}_j = (Y_j - \hat{\mu}_n) / \hat{\sigma}_n, j = 1, 2, \dots, n$  و با استفاده از برآوردهای گشتاوری (۶) آزمون‌ها را به‌کار می‌بریم. در روش مینتانیس برای محاسبه آماره آزمون  $T_{n,a}$  مقدار  $D_n$  روی شبکه‌ای از نقاط در فاصله  $[-a, a]$  محاسبه می‌شود. در این شبکه ابتدا فاصله  $[-a, a]$  به فاصله‌هایی به طول  $0.01 \times a$  تقسیم می‌شود و سپس سوپریمم مورد نظر با ماکسیمم  $D_n$  روی شبکه  $[-a, a]$  محاسبه می‌گردد. اما در این‌جا روش دیگری را پیشنهاد می‌کنیم و آن استفاده از یک تابع اپتیمم برای یافتن مقدار سوپریمم مورد نظر است. آزمون به روش جدید را با  $T_{n,a}^O$  نشان می‌دهیم. این روش علاوه بر داشتن زمان کمتر در شبیه‌سازی مونت کارلو، دارای دقت و توان بیش‌تری نسبت به روش مینتانیس است. برنامه روش مینتانیس و همچنین روش جدید با استفاده از نرم‌افزار  $R$  نگاشته شده‌اند.

برای یافتن مقدار بحرانی آزمون مورد نظر به دو روش بر اساس نمونه مشاهده شده  $y_1, \dots, y_n$ ، پارامتر شکل  $\lambda = \lambda$  و اندازه آزمون  $\alpha$  این مراحل را انجام می‌دهیم (روش جدید فقط در مرحله ۲ با روش مینتانیس متفاوت است):

۱. با استفاده از نمونه  $y_1, \dots, y_n$  و  $\lambda = \lambda$ ، پارامترهای  $\hat{\mu}$  و  $\hat{\sigma}$  از رابطه (۶) به روش گشتاوری برآورد

می‌گردند؛

۲.  $D_n(t_j)$  روی شبکه  $t_j \in [-a, a]$  با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شود؛

۳.  $T_{n,a}$  روی شبکه  $t_j \in [-a, a]$  محاسبه می‌شود؛

۴. مراحل ۱ الی ۳،  $m$  بار تکرار می‌شود؛

۵- مقدار بحرانی  $c_n(\alpha)$  با یافتن چندک  $1-\alpha$  از تابع توزیع تجربی  $T_{n,a}$  محاسبه می‌شود.

برآورد توان آزمون برای فرض مقابل، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به‌طور مشابه امکان‌پذیر است. مینتانیس [۸] از  $m=10000$  بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو برای بررسی توان آزمون استفاده کرده است. اما می‌دانیم قبل از توانا بودن یک آزمون، اندازه آن آزمون مهم است. مینتانیس اندازه آزمون را بررسی نکرده است. در ادامه اندازه آزمون را با استفاده از آماره  $T_{n,a}^O$  بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم مقدار آماره  $T_{n,a}^O$  به پارامترهای مکان و مقیاس وابسته نیست. توجه کنید آماره  $T_{n,a}^O$  فقط از طریق  $\hat{X}_j$  به  $Y_j$  به‌ازای  $j = 1, 2, \dots, n$  مربوط است. بنا بر این کافی است نشان دهیم  $\hat{X}_j$  به پارامترهای مکان و مقیاس وابسته نیست.

فرض کنید  $Y \sim SN(0, 1; \lambda_0)$  و تبدیل  $Y^* = \delta + cY$ ،  $(\delta \in \mathbb{R}, c > 0)$  را در نظر بگیرید. تحت این تبدیل داریم  $Y_n^* = \delta + cY_n$  و  $S_n^{r*} = c^r S_n^r$  می شود. بنا بر این  $\hat{\mu}_n^* = c + \delta \hat{\mu}_n$  و  $\hat{\sigma}_n^* = c \hat{\sigma}_n$  به دست می آیند. در واقع این نشان می دهد برآورد گشتاوری  $\sigma$  مکان ناورد و مقیاس هموردا و برآورد گشتاوری  $\mu$  هموردای مکان و مقیاس است. با جای گذاری در  $\hat{X}_j^* = (Y_j^* - \hat{\mu}_n^*) / \hat{\sigma}_n^*$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$  نتیجه می گیریم که  $\hat{X}_j^* = \hat{X}_j$  می شود. بنا بر این آماره  $T_{n,a}^O$  تغییری نمی کند. در نتیجه برای بررسی اندازه آزمون بدون از دست دادن کلیت مسئله حالت  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$  را در نظر می گیریم.

جدول ۱ درصد رد فرض صفر را در  $m=10000$  بار تکرار شبیه سازی مونت کارلو برای مقادیر پارامتر چولگی  $\lambda_0 = 0, 0.5, 1, 2$ ، اندازه اسمی آزمون  $\alpha = 0.05, 0.1$  و اندازه نمونه های  $n = 20, 50$  بر اساس آماره  $T_{n,a}^O$  به ازای  $a = 0.1$  نشان می دهد.

جدول ۱. اندازه آزمون با استفاده از آماره  $T_{n,a=0.1}^O$

	$\alpha=0.05$				$\alpha=0.1$			
	$\lambda_0=0$	$\lambda_0=0.5$	$\lambda_0=1$	$\lambda_0=2$	$\lambda_0=0$	$\lambda_0=0.5$	$\lambda_0=1$	$\lambda_0=2$
$n=20$	٪۵/۳۹	٪۴/۷۹	٪۵/۲	٪۴/۴۱	٪۱۰/۳۶	٪۱۰/۱۸	٪۱۰/۲۲	٪۹/۵۴
$n=50$	٪۵/۲۴	٪۴/۷۲	٪۴/۵۵	٪۴/۸۳	٪۱۰/۲۷	٪۹/۹۳	٪۹/۹۶	٪۹/۴۲

جدول ۱ نشان می دهد اندازه آزمون به اندازه اسمی آزمون  $\alpha$  نزدیک است. این نتایج شبیه سازی را برای  $T_{n,a}^O$  و مقادیر متفاوت دیگر  $\alpha = 0.2, 0.4$ ، به طور مشابه تکرار شد و به نظر می رسد آماره آزمون یا حداقل فراوانی های متناظر رد، نسبت به تغییر  $a$  پایدارند.

جدول های ۱ و ۲ مینتانیس [۸] توان آزمون  $H_0$  را برای  $\lambda_0 \in \{0, 0.5, 1, 2\}$  و  $a \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$  و همچنین فرض های مقابل گوناگون و اندازه نمونه  $n \in \{20, 50\}$  نشان می دهد. برخی از این فرض های مقابل بدین صورت هستند:

۱. توزیع چوله  $t$ ،  $ST(\lambda, \vartheta)$  (کیم [۶]) به صورت

$$ST(\lambda, \vartheta) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} (|Z_1| / \sigma) + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} (Z_2 / \sigma)$$

که در آن  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  و  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  <sup>i.i.d</sup> و  $\sigma^2 \sim \text{Gamma}(\vartheta/2, 2/\vartheta)$ ، به ازای  $\vartheta \in \{2, 5\}$  و  $\lambda \in \{0, 2\}$ .

۲. توزیع  $g$  توکی  $Tu(g)$  به صورت

$$Tu(g) = (e^{gZ_1} - 1) / g$$

که در آن  $Z_1 \sim N(0, 1)$ ، به ازای  $g \in \{1, 1/5\}$ .

۳. توزیع لاپلاس نامتقارن  $AL(\varphi)$  (کاتز و همکاران [۷]) به صورت

$$AL(\varphi) = (1/\sqrt{2})((E_1 / \varphi) - \varphi E_2)$$

که در آن  $E_r, E_r \sim Exp(1)$  <sup>i.i.d</sup>، به ازای  $\varphi \in \{0.5, 1\}$ .

جدول ۲. توان آزمون به دو روش مینتانیس  $T_{n,a}$  و جدید  $T_{n,a}^O$

	فرض مقابل	$\alpha = 0/05$		$\alpha = 0/1$	
		$T_{20,0/1}$	$T_{20,0/1}^O$	$T_{20,0/1}$	$T_{20,0/1}^O$
$\lambda_1 = 0$	$ST(0, 2)$	٪۵۱	٪۹۹	٪۵۸	٪۱۰۰
	$ST(0, 5)$	٪۲۲	٪۲۲	٪۲۹	٪۳۰
	$Tu(0/1)$	٪۸	٪۸	٪۱۳	٪۱۳
	$Tu(1/5)$	٪۹۶	٪۹۶	٪۹۸	٪۹۸
	$AL(0/5)$	٪۲۷	٪۹۹	٪۳۶	٪۱۰۰
	$AL(1)$	٪۵۹	٪۹۹	٪۷۰	٪۱۰۰
$\lambda_1 = 2$	$ST(2, 2)$	٪۵۳	٪۵۸	٪۵۹	٪۶۷
	$ST(2, 5)$	٪۲۰	٪۲۵	٪۲۷	٪۳۴
	$Tu(1)$	٪۲۴	٪۶۴	٪۳۱	٪۷۵
	$Tu(1/5)$	٪۸۴	٪۱۰۰	٪۸۹	٪۱۰۰
	$AL(0/5)$	٪۳۰	٪۱۰۰	٪۳۹	٪۱۰۰
	$AL(1)$	٪۳۱	٪۱۰۰	٪۴۰	٪۱۰۰

جدول ۲ درصد رد فرض صفر را تحت فرض‌های مقابل ۱ الی ۳ در  $m=10000$  بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقادیر پارامتر چولگی  $\lambda_1 = 0, 2$ ، اندازه اسمی آزمون  $\alpha = 0/05, 0/1$  و اندازه نمونه  $n=20$  بر اساس آماره‌های  $T_{n,a}$  و  $T_{n,a}^O$  به‌ازای  $a=0/1$  نشان می‌دهد. جدول ۲ نشان می‌دهد روش جدید نسبت به روش مینتانیس برای یافتن آماره آزمون به توان بیش‌تری منجر می‌شود.

جدول‌های ۱ و ۲ مینتانیس [۸] به مقایسه توان آزمون  $T_{n,a}$  با کلموگروف-اسمیرنوف پرداخته است. با مقایسه نتایج این شبیه‌سازی و شبیه‌سازی مینتانیس [۸] نتیجه می‌گیریم آزمون  $T_{n,a}$  رقیب جدی آزمون کلموگروف-اسمیرنوف برای نمونه‌های متفاوت است. بنا بر این تواناترین آزمون در این بخش، آزمون جدید  $T_{n,a}^O$  ارائه شده در این مقاله است.

## ۲. آزمون نیکویی برآزش در حالت $\lambda$ مجهول

در این حالت نیز مانند حالت  $\lambda$  معلوم از برآوردهای گشتاوری استفاده می‌شود. برای محاسبه برآوردهای گشتاوری می‌توان از روش مستقیم استفاده کرد اما در این بخش از روشی ساده‌تر استفاده می‌کنیم. فرض کنید مشاهدات نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $SN(\mu, \sigma, \lambda)$  با گشتاورهای مرکزی نمونه‌ای  $y_n = (y_1, \dots, y_n)$  برابر  $m_1 = 0, m_2 = s^2$  و  $m_3 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^3$  باشند. برآوردهای گشتاوری پارامترها را با  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$  و  $\tilde{\lambda}$

نمایش می‌دهیم. اگر  $\bar{y}$  و  $s$  به ترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه مشاهده شده  $y_1, \dots, y_n$  باشد، آنگاه نمونه استاندارد شده  $y_{ns} = (y_{s1}, \dots, y_{sn})$ ، که در آن  $y_{si} = (y_i - \bar{y})/s$ ;  $i = 1, \dots, n$  مشاهدات نمونه تصادفی از توزیع  $SN(\mu_s, \sigma_s, \lambda)$  با پارامترهای  $\mu_s = \frac{\mu - \bar{y}}{s}$  و  $\sigma_s = \frac{\sigma}{s}$  هستند. در واقع اگر  $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$  آنگاه

$$Y_s = \frac{Y - \bar{y}}{s} \sim SN(\mu_s, \sigma_s, \lambda)$$

حال با استفاده از گشتاورهای اول، دوم و سوم نمونه‌ای توزیع  $Y_s$  که آن‌ها را به ترتیب با  $m'_1 = \bar{y}_s = 0$ ،  $m'_2 = s_{y_s}^2 = 1$  و  $m'_3 = m_r / s^r$  نشان می‌دهیم، برآوردهای گشتاوری پارامترهای  $\mu_s$ ،  $\sigma_s$  و  $\lambda$

$$\text{را به دست می‌آوریم. اگر } \mathcal{G} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \text{ و } c = \{2/(\xi - \pi)\}^{1/r}, \text{ و } b = \sqrt{2/\pi} \text{ آنگاه}$$

$$\begin{aligned} E(Y_s) &= \mu_s + b\sigma_s\mathcal{G} \equiv m_1 = 0 \Rightarrow \tilde{\mu}_s = \frac{-\tilde{\mu}_s}{b\tilde{\sigma}_s} \\ E(Y_s^2) &= \mu_s^2 + 2b\mu_s\sigma_s\mathcal{G} + \sigma_s^2 \equiv m_2 = 1 \Rightarrow \tilde{\sigma}_s = (1 + \tilde{\mu}_s^2)^{1/r} \\ E(Y_s^r) &= -2\mu_s^r + \frac{\mu_s^r}{b^r} \equiv \frac{m_r}{s^r} \Rightarrow \tilde{\mu}_s = \frac{-cm_r^{1/r}}{s} \end{aligned} \quad (13)$$

در نتیجه داریم

$$\tilde{\mu} = \bar{y} + s\tilde{\mu}_s, \quad \tilde{\sigma} = s\tilde{\sigma}_s, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\mathcal{G}}/(1 - \tilde{\mathcal{G}}^2)$$

چون توزیع آماره آزمون تحت فرض صفر به پارامتر نامعلوم  $\lambda$  وابسته است، برای یافتن مقدار بحرانی  $\tilde{c}(\alpha)$  از روش بوت استرپ پارامتری استفاده می‌کنیم. برای یافتن نقطه بحرانی آزمون‌های مورد نظر بر اساس نمونه مشاهده شده  $y_1, \dots, y_n$  و اندازه آزمون  $\alpha$  به روش بوت استرپ پارامتری این مراحل را طی می‌کنیم:

۱. برآوردهای گشتاوری  $\hat{\mu}$ ،  $\hat{\sigma}$  و  $\hat{\lambda}$  و سپس  $\hat{x}_j = (y_j - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  را محاسبه می‌کنیم.
۲. مقدار آماره آزمون  $\tilde{T}_{n,a}$  را بر اساس  $\hat{x}_j$ ،  $\hat{\lambda}$  محاسبه می‌کنیم؛
۳. نمونه بوت استرپ  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  را از توزیع  $SN(0, 1; \hat{\lambda})$  تولید می‌کنیم؛
۴. برآوردهای بوت استرپ  $\hat{\mu}^*$ ،  $\hat{\sigma}^*$  و  $\hat{\lambda}^*$  و سپس نسخه بوت استرپ  $\hat{X}_j^* = (Y_j^* - \hat{\mu}^*)/\hat{\sigma}^*$  را بر اساس نمونه بوت استرپ محاسبه می‌کنیم؛
۵. مقدار آماره آزمون بوت استرپ  $\tilde{T}^* \equiv \tilde{T}_{n,a}^*$  را بر اساس  $\hat{X}_j^*$  و  $\hat{\lambda}_n^*$  محاسبه می‌کنیم؛
۶. مراحل ۳ الی ۵ را  $B=1000$  بار تکرار کرده و  $\tilde{T}_{1, \dots, \tilde{T}_{1000}^*$  را به دست می‌آوریم؛
۷. مقدار بحرانی  $\tilde{c}_n(\alpha) = \tilde{T}_{(95)}^*$  را ارائه می‌کنیم، که در آن  $\tilde{T}_{(j)}^*$  -امین مقدار مرتب شده  $\tilde{T}_{1, \dots, \tilde{T}_{1000}^*$  است؛
۸. فرض صفر در اندازه آزمون  $\alpha$  رد می‌گردد اگر  $\tilde{T}_{n,a} > \tilde{c}_n(\alpha)$



اکنون می‌توان آزمون بوت استرپ پارامتری  $\tilde{T}_{n,a}$  را برای شبیه‌سازی مونت کارلو و محاسبه اندازه و توان آزمون به‌کار برد. مینتانیس [۸] این آزمون را برای  $\alpha=0/2$  و با استفاده از شبیه‌سازی  $m=100$  بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو با اندازه نمونه  $n=50$  انجام داده است. شاید دلیل تعداد نمونه کوچک مونت کارلو، زمان بر بودن برنامه مینتانیس بوده است. در این آزمون نیز می‌توان آماره آزمون را از تابع اپتیم به‌دست آورد. این آزمون را با نماد  $\tilde{T}_{n,a}^O$  نمایش می‌دهیم. روش جدید به‌دلیل زمان کمتر می‌تواند از  $m=1000$  بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کند. بنا بر این برای مقایسه دو روش، نتایج خود را برای  $m=1000$  بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو گزارش می‌کنیم. جدول ۳ اندازه آزمون‌های  $\tilde{T}_{n,a}^O$ ،  $\tilde{T}_{n,a}$  و  $KS$  را برای  $SN(0,1;\lambda)$  با  $\lambda \in \{0/25, 0/5, 0/75, 1, 2\}$  نشان می‌دهد.

جدول ۳. اندازه آزمون‌های  $\tilde{T}_{n,a=0/2}^O$ ،  $\tilde{T}_{n,a=0/2}$  و  $KS$  به ازای  $n=50$  و  $\alpha=0/2$

فرض مقابل	$\lambda=0/25$	$\lambda=0/5$	$\lambda=0/75$	$\lambda=1$	$\lambda=2$
$\tilde{T}_{n,a}^O$	٪۲/۲	٪۳/۱	٪۳/۵	٪۴/۶	٪۱/۲
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۶	٪۶	٪۵	٪۴	٪۴
$KS$	٪۵/۲	٪۶/۴	٪۵/۲	٪۴/۹	٪۶/۷

جدول ۳ نشان می‌دهد آزمون جدید  $\tilde{T}_{n,a}^O$  ارائه شده در این مقاله نسبت به آزمون‌های مینتانیس و کلموگروف-اسمیرنوف دارای اندازه آزمون بهتری است. برای بررسی توان آزمون‌ها از فرض‌های مقابل مینتانیس [۸] استفاده شده است. مینتانیس [۸] در حالت  $\lambda$  مجهول توان آزمون کلموگروف-اسمیرنوف را بررسی نکرده است؛ در حالی که هدف ارائه مقاله او نشان دادن برتری آماره آزمون خود بر این آزمون است. جدول ۴ توان آزمون‌ها را به‌روش‌های مختلف و فرض‌های مقابل توزیع‌های چوله  $t$ ، توکی و لاپلاس نامتقارن نشان می‌دهد. جدول ۴ نشان می‌دهد آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، جدید  $\tilde{T}_{n,a}^O$  و  $\tilde{T}_{n,a}$  به‌ترتیب در اکثر فرض‌های مقابل توان بیشتری دارند. حتی در برخی از این موارد، روش جدید محاسبه آماره آزمون نیز رقیب آزمون کلموگروف-اسمیرنوف نیست و این نشان دهنده ضعف آماره آزمون مینتانیس برای  $\lambda$  مجهول است.

### کاربرد برای داده‌های واقعی

در این بخش با مثالی از داده‌های واقعی نتایج روش جدید را با روش مینتانیس مقایسه می‌کنیم. داده‌های جدول‌های ۱ و ۲ گوپتا و براون [۵] نمره بهره هوشی ۸۷ سفیدپوست و ۵۲ غیرسفیدپوست مرد را در یک شرکت بیمه در سال ۱۹۷۱ نشان می‌دهد. برآوردهای گشتاوری پارامترهای  $(\mu, \sigma, \lambda)$  در جدول ۵ گزارش شده است.

جدول ۴. توان آزمون های  $\tilde{T}_{n,a}^O$  و  $KS$  برای  $\alpha=0.2$  و  $\pi=0.0$

فرض مقابل	$ST(0.25, 2)$	$ST(0.5, 3)$	$ST(0.75, 5)$	$ST(1, 10)$	$ST(2, 15)$
$\tilde{T}_{n,a}^O$	٪۷۷	٪۶۹/۸	٪۱۵/۵	٪۸/۹	٪۷/۲
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۴۸	٪۳۳	٪۱۱	٪۷	٪۶
$KS$	٪۸۹/۸	٪۵۳/۲	٪۲۴/۷	٪۶/۳	٪۸/۵
فرض مقابل	$Tu(0.25)$	$Tu(0.5)$	$Tu(1)$	$Tu(1/5)$	$Tu(2)$
$\tilde{T}_{n,a}^O$	٪۹/۲	٪۳۵/۳	٪۹۱/۲	٪۹۶/۹	٪۹۹/۴
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۳	٪۲۵	٪۸۵	٪۹۸	٪۱۰۰
$KS$	٪۱۶/۵	٪۲۴/۵	٪۹۱	٪۹۸/۹	٪۱۰۰
فرض مقابل	$AL(1)$	$AL(1/25)$	$AL(1/5)$	$AL(1/75)$	$AL(2)$
$\tilde{T}_{n,a}^O$	٪۳۵/۷	٪۳۰/۲	٪۴۱	٪۵۴/۲	٪۴۳/۳
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۹	٪۲۰	٪۲۷	٪۳۴	٪۴۲
$KS$	٪۶۰	٪۵۳/۶	٪۵۲	٪۵۵/۷	٪۵۰/۴

جدول ۵. برآورد پارامترهای توزیع چوله نرمال برای داده های بهره هوشی مردان

پارامتر	$\mu$	$\sigma$	$\lambda$
سفید پوست	۱۰۵/۶۱	۱۱/۹۸	۱/۱۶
غیر سفید پوست	۹۸/۷۹	۱۱/۳۸	۱/۷۳

در جدول های ۶ و ۷ مقادیر آماره آزمون و مقادیر بحرانی  $0.05$  و  $0.1$  داده های بهره هوشی، به ترتیب برای دو روش مینتانیس  $\tilde{T}_{n,a}$  و جدید این مقاله  $\tilde{T}_{n,a}^O$  برای دو گروه مردان سفید و سیاه پوست به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  محاسبه شده اند. با مقایسه مقادیر بحرانی و مقادیر آماره آزمون در جدول های ۶ و ۷ فرض چوله نرمال بودن هیچ یک از گروه ها در سطوح  $5\%$  و  $10\%$  رد نمی شود. البته چنان که اشاره شد روش جدید محاسبه سریع تر از روش مینتانیس است. علاوه بر این، مقایسه جدول های ۶ و ۷ نشان می دهد که مقادیر آماره آزمون بعد از روش تا ۴ رقم اعشار با یکدیگر یکسان اند ولی نقاط بحرانی آنها تفاوت چشمگیری دارد. به طوری که نقاط بحرانی آماره آزمون  $\tilde{T}_{n,a}^O$  مقادیر به مراتب کوچکتری نسبت به نقاط بحرانی آماره آزمون  $\tilde{T}_{n,a}$  دارد.

جدول ۶. مقادیر بحرانی و آماره آزمون  $\tilde{T}_{n,a}$  برای داده های بهره هوشی

$\alpha$	سفید پوست			غیر سفید پوست		
	$0.05$	$0.1$	$\tilde{T}_{n,a}$	$0.05$	$0.1$	$\tilde{T}_{n,a}$
$\alpha=0.2$	۰/۰۴۷	۰/۰۳۵	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۵۲	۰/۰۲۹	۰/۰۰۲۷۸
$\alpha=0.4$	۰/۲۲۹	۰/۱۶۹	۰/۰۲۸۱۰	۰/۱۹۶	۰/۱۲۵	۰/۰۲۹۲۷
$\alpha=0.6$	۰/۶۴۹	۰/۴۸۷	۰/۱۰۳۶۸	۰/۴۷۸	۰/۲۹۲	۰/۱۳۰۰۳
$\alpha=1.0$	۳/۰۴	۲/۴۴	۰/۵۳۵۴۷	۲/۳۲	۱/۶۲	۱/۰۵۰۸۹

جدول ۷. مقادیر بحرانی و آماره آزمون  $\tilde{T}_{n,a}^0$  برای داده‌های بهره هوشی

$\alpha$	سفید پوست			غیر سفید پوست		
	۰/۰۵	۰/۱	$\tilde{T}_{n,a}^0$	۰/۰۵	۰/۱	$\tilde{T}_{n,a}^0$
$\alpha=0/2$	۰/۰۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۴۵۲	۰/۰۰۲۷۸
$\alpha=0/4$	۰/۰۰۷	۰/۰۴۸	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۵۱	۰/۰۴۴	۰/۰۲۹۲۶
$\alpha=0/6$	۰/۲۴۵	۰/۱۹۶۵	۰/۱۰۳۶۳	۰/۲۱۲	۰/۱۷۵	۰/۱۲۹۹۷
$\alpha=1/0$	۱/۶۳۵	۱/۴۰۷۵	۰/۵۳۵۴۱	۱/۴۲	۱/۲۵۷	۱/۰۵۰۷

### نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش محاسبه آماره آزمون مینتانیس بررسی شد که از نظر توان و زمان اجرای شبیه‌سازی نسبت به روش قبلی برتری دارد. این روش بر مبنای استفاده از یک تابع اپتیمم است. همچنین شبیه‌سازی‌ها نشان داد آزمون معرفی شده مینتانیس در مورد پارامتر معلوم، بر آزمون کلموگروف-اسمیرنوف برتری دارد؛ اما در مورد پارامتر نامعلوم این ادعا درست نیست.

### منابع

1. A. Azzalini, "A class of distributions which includes the normal ones", Scandinavian Journal of Statistics, 12 (1985) 171-178.
2. J. Clark, L. Horvath, M. Lewis, "On the estimation of the spread rate for a biological population" Statistics and Probability Letters, 51 (2001) 225-234.
3. T. W. Epps, K. J. Singleton, L. B. Pulley, "A test of separate families of distributions based on the empirical moment generating function", Biometrika, 69 (1982) 391-399.
4. A. Feuerwerker, "On the empirical saddlepoint approximation", Biometrika, 76 (1989) 457-464.
5. R. C. Gupta, N. Brown, "Reliability studies of the skew-normal distribution and its application to a strength-stress model", Communication in Statistics: Theory and Methods, 30 (2001) 2427-2445.
6. H. J. Kim, Binary regression with a class of skewed t link models", Communications in Statistics-Theory and Methods, 31 (2002) 1863-1886.

7. S. Kotz, T. Kozubowski, K. Podgrski, "The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics", Engineering, and Finance, (2001), Birkhauser, Boston.
8. S. G. Meintanis, "A Kolmogorov-Smirnov type test for skew normal distributions based on the empirical moment generating function", Journal of Statistical Planning and Inference, 137 (2007) 2681-2688.