تاریخ چاپ: بهار ۱۳۹۰

روش فاکتور کردن در واپاشی‌های نیمه لپتونی مزون B

حسین مهربان: دانشگاه سمنان، دانشکده علوم، گروه فیزیک

hmehraban@semnan.ac.ir

چکیده

عمومی‌ترین روش پدیدارشناسی برای بررسی خواص واپاشی‌های مختلف مزون B ، روش فاکتور کردن[۱] است که برای واپاشی‌های نیمه لپتونی[۲] دو جسمی به‌کار می‌رود. در این تحقیق با استفاده از روش فاکتور کردن، آهنگ زمانی واپاشی‌های[۳] مزون B مطابق با فرضیهٔ فرانمایی رنگی[۴] به‌دست آمده است. در این تحقیق روش فاکتور کردن برای به‌دست آوردن دامنه واپاشی‌های کوارک b به منظور محاسبهٔ دامنهٔ واپاشی‌های لپتونی[۵] و نیمه لپتونی[۶] مزون B به‌کار رفته است.

مقدمه

برای تولید هادرون‌ها در برهمکنش‌های ضعیف به‌وسیلهٔ کوارک‌ها روش‌های بسیاری وجود دارد [۱]. برای تولید هادرون‌ها تابع حالت ابتدایی با تابع حالت نهایی جفت می‌شوند و هنگامی فرایند این تولید پیچیده‌تر می‌شود که برهمکنش‌های شاخه‌ای گلئون و کوارک[۷]، زوج‌های تولید شده و لپتون‌ها را نیز در نظر بگیریم. به همین دلیل توصیف تئوری واپاشی‌های هادرونی (غیرلپتونی) مشکل است. ممکن است برهمکنش‌های QCD هنگامی‌که یک زوج کوارک- پادکوارک تولید می‌کنند، فرآیند این واپاشی‌ها را پیچیده کند؛ ولی با توجه به نتایج تجربی تولید واپاشی‌های مزون B که در شتاب‌دهنده‌های فعال دنیا مطرح است [۲]، می‌توان از تغییر گلئونی تابع حالت نهایی صرف نظر کرد و تابع حالت نهایی هادرون‌ها را با تقریب خوب بدون تغییر گلئونی در نظر گرفت [۳]. بنا بر این در غیاب هر گونه فرضیهٔ فیزیکی، ما می‌توانیم صرفاً از نظر پدیدارشناسی، واپاشی‌های هادرونی مزون‌های مختلف را بررسی کنیم. عمومی‌ترین روش پدیدارشناسی برای بررسی خواص واپاشی‌های مختلف مزون B، روش فاکتور کردن است که برای واپاشی‌های هادرونی دو جسمی به‌کار می‌رود [۴]. فرضیه فرانمایی رنگی اساس روش فاکتور کردن است که در آن دامنه‌های فاکتوری در داخل دو عنصر ماتریسی تولید می‌شوند [۵]. این روش به‌طور گسترده در فیزیک کوارک‌های سنگین که تقریباً تنها روش برای واپاشی‌های هادرونی مزون‌های مربوط به این کوارک‌هاست، استفاده می‌شود [۶].

واژه‌های کلیدی: کوارک b ، مزون B ، فاکتور کردن، لپتونی، نیمه لپتونی، آهنگ زمانی واپاشی.

دریافت ۸۶/۳/۱۵ پذیرش۸۸/۸/۲۷

۱.Factorization Method ۲.Semileptonic Decays ۳.Decay Rates
۴.Colour Transparency hypothesis ۵.Leptonic ۶.Semileptonic
۷.trees of gluon and quark

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

با این حال، روش فاکتور کردن نمی‌تواند کمیت‌های تئوری و تمام واپاشی‌های هادرونی ممکن را به خوبی شرح دهد [۷]. اغلب واپاشی‌هایی که این روش به خوبی از عهدهٔ آن‌ها بر می‌آید حالت‌هایی هستند که در آن‌ها تابع حالت نهایی بر حسب زوج کوارکی که به‌وجود می‌آیند به ذرهٔ نهایی وابستگی نداشته باشند [۸]. به هر حال باید دقت کرد که به‌کار بردن این روش وابستگی مستقیم به واپاشی ذراتی دارد که در هر مورد بررسی می‌شوند. به‌طور خلاصه فرضیه‌هایی که دامنهٔ پراکندگی را بر حسب دو عنصر ماتریس جدا از یک‌دیگر بیان می‌کنند، روش فاکتور کردن نامیده می‌شوند. این روش همچنین برای واپاشی‌های نیمه لپتونی که دامنهٔ آن‌ها به دو دامنهٔ لپتونی و هادرونی تقسیم می‌شوند نیز به‌کار می‌رود [۹].

مثال سادهٔ واپاشی هادرونی دو جسمی مزون B به‌صورت $B \to D\pi$ را که وابسته به مدل کوارک $b \to cd\bar{u}$ است در نظر می‌گیریم. بعد از این‌که مزون B از طریق برهم کنش ضعیف واپاشیده شد، کوارک‌ها با یک ممنتوم چشمگیر با گلئون‌های میانی و زوج کوارک- پادکوارک سبک[۱] به سختی بر هم کنش دارند. اگر زوج کوارک- پادکوارک سبک $d\bar{u}$ دارای جرم ناوردای کوچکی مثل $m(d\bar{u}) \approx m_\pi$ باشد، آنگاه این دو کوارک با یک‌دیگر در حالت میانی به‌صورت جفت شده باقی می‌مانند. همچنین اگر این دو کوارک در حالت ابتدایی دارای حالت رنگی منفرد[۲] باشند، آنگاه آن‌ها در حالت میانی نه به‌صورت منفرد، بلکه به‌صورت تابع حالت رنگی منفرد دو قطبی[۳] برهم کنش خواهند داشت. از آن‌جا که مسافت بین جفت کوارک- پادکوارک d و $\bar{u}$ در فرایند برهم کنش با گلئون‌ها و سایر کوارک‌ها به آهستگی افزایش می‌یابد، ممکن است که خاصیت رنگی این زوج کوارک- پادکوارک، قبل از این‌که یک ممنتوم دو قطبی بسازد، از بین برود. در این حالت است که زوج کوارک- پادکوارک می‌تواند به عنوان یک ذرهٔ منفرد π در نظر گرفته شود و این از نظر پدیدارشناسی یک فرانمایی رنگی است [۱۰]. در فرضیهٔ فرانمایی رنگی فرض می‌شود که زوج کوارک- پاد کوارک در مقیاس QCD به‌صورت جفت شده باقی بمانند و فقط وابسته به یک ممنتوم کرومومغناطیس[۴] باشند. در مقایسه با حالت قبل، اگر زوج کوارک- پادکوارک سبک $d\bar{u}$ دارای جرم ناوردای بزرگ باشد، باز کوارک‌ها می‌توانند با یک‌دیگر در حالت میانی به‌طور قوی بر هم کنش داشته باشند و در این حالت نیز می‌توانیم آن‌ها را در یک تک‌تایی π به‌صورت جفت شده داشته باشیم.

بنا بر این، فرضیه‌ای که می‌تواند به خوبی از عهدهٔ توضیح واپاشی هادرونی $B \to D\pi$ برآید همان روش فاکتور کردن واپاشی‌های هادرونی است که دامنهٔ پراکندگی را به‌صورت دو عنصر ماتریسی به‌صورت زیر در نظر می‌گیرد[۱۱]:

$$\langle D\pi|(\bar{c}b)_{V-A}(\bar{d}u)_{V-A}|B\rangle = \langle D|(\bar{c}b)_{V-A}|B\rangle \times \langle \pi|(\bar{d}u)_{V-A}|0\rangle \qquad (۱)$$

رابطهٔ بالا را می‌توان ساده‌تر کرد، بدین ترتیب که ماتریس عناصر $\langle \pi|(\bar{d}u)_{V-A}|0\rangle$ را وابسته به f_π و

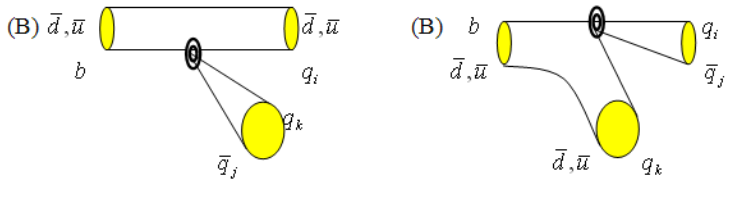
۱.light quark-antiquark ۲.colour singlet state ۳.singlet colour dipole ۴.chromomagnetic

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

$\langle D|(\bar{c}b)_{V-A}|B\rangle$ را وابسته به واپاشی‌های نیمه لپتونی مزون B در نظر گرفت که هر دو این مقادیر از طریق تجربی با استفاده از واپاشی‌های دو ذره‌ای مزون‌ها به‌دست می‌آیند. برای بهتر تجزیه و تحلیل کردن این واپاشی‌ها، لازم است تصحیحات برد کوتاه اختلال و اثرات مربوط به QCD را در نظر بگیریم. برای مثال وقتی تصحیحات QCD را وارد می‌کنیم عنصرهای ماتریس (۱) تغییر پیدا می‌کنند و از طریق روش فاکتور کردن قابل محاسبه نیستند؛ بلکه باید آن‌ها را از روش بازبه‌هنجارش[۱] در مقیاس μ به‌دست آورد و در نتیجه هر دو قسمت عناصر ماتریس فاکتور کردن ناوردا نیستند.

شکل ۱ دیاگرام‌های مربوط به واپاشی‌های هادرونی مزون‌های $\overline{B}^0$ و B^- در دو حالت رنگی مجاز[۲] و رنگی فوق العاده[۳] که در اغلب واپاشی‌ها استفاده می‌شوند را نشان می‌دهد [۱۲]. دیاگرام (b) از آن جهت رنگی فوق‌العاده نامیده می‌شود که اگر رنگ کوارک‌های جفت شده، به‌طور مناسب با یک‌دیگر در نظر گرفته شوند، می‌توان به‌وسیله آن‌ها هادرون‌ها را ساخت. دیاگرام‌های (a) و (b) برای واپاشی‌های هادرونی $\overline{B}^0$ حالت‌های نهایی متفاوتی را نمایش می‌دهند در حالی که برای واپاشی‌های هادرونی B^- هم حالت‌های نهایی متفاوت و هم حالت‌های تداخلی را نمایش می‌دهند.

کوارک‌های سبک[۴] در ساختن مزون‌های B نقش یک کوارک واسطه را دارند که در هر واپاشی فقط از آن‌ها یک گلئون انتشار پیدا می‌کند. در فرایند برهم‌کنش‌های ضعیف، واپاشی‌هایی که واسطه هستند، معمولاً دارای فرکانس‌های پایین هستند. مزون‌ها دارای حالت رنگی منفرد[۵] هستند، در نتیجه دیاگرام (b) به دیاگرام (a) به وسیلهٔ فاکتور $1/N_c$ که N_c تعداد رنگ‌هاست، وابسته است. به عبارت دیگر، حالت رنگی غیرمجاز، دیاگرام (b)، از حالت رنگی مجاز، دیاگرام (a)، دارای توزیع کوچک‌تری است. در حالت عمومی دو نوع دیاگرام در حالت نهایی وجود دارد، اما در واپاشی‌های B^- علاوه بر آن می‌تواند بین دیاگرام‌های (a) و (b) تداخل نیز وجود داشته باشد. روش فاکتور کردن بسیار کارآمد است در واپاشی‌های مزون B نسبت به واپاشی‌های مزون D زیرا در واپاشی‌های مزون B انرژی عبوری خیلی زیاد است.



شکل۱. دیاگرام‌های مربوط به واپاشی‌های هادرونی مزون‌های $\overline{B}^0$ و B^- در دو حالت (a) رنگی مجاز و (b) رنگی فوق‌العاده

۱.renormalization ۲.colour allowed ۳.colour suppressed ۴.light quarks ۵.colour singlet

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

واپاشی‌های لپتونی

واپاشی‌های لپتونی مزون B برای تعیین ثابت f_B در روش فاکتور کردن و همچنین تحقیقات بیش‌تر در فراسوی فیزیک ذرات بنیادی در مدل استاندارد[۱] است [۱۳]. واپاشی‌های لپتونی خالص[۲]، $B^- \to \ell \nu_\ell$ که $\ell = e, \mu, \tau$ است، دارای هلیسیتهٔ فوق العاده[۳] است و به راحتی در مدل استاندارد قابل محاسبه است. مدهای واپاشی بار از نابودی بوزون W ناشی می‌شوند. مطابق با [۱۴] عناصرماتریس جریان[۴] برای ذراتی که با قدرت برهمکنش دارند در برهم کنش‌های ضعیف در سطح مدل کوارک، در حد انرژی‌های پایین برای لپتون‌ها و کوارک‌ها برابر است با:

$$j^{\mu}_{Lepton} = (e^{\dagger}_L \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{eL} + \mu^{\dagger}_L \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{\mu L} + \tau^{\dagger}_L \tilde{\sigma}^{\mu} \nu_{\tau L}) \qquad (۲)$$

$$j^{\mu\dagger}_{Quark} = \sum_{i,j} (u^{\dagger}_{jL} \tilde{\sigma}^{\mu} d_{eL})\ V_{ij}$$

و دانسیتهٔ کل لاگرانژین بر هم کنش برابر است با:

$$L = -2\sqrt{2} G_F (j^{\mu}_{Lepton}\ j^{\mu\dagger}_{Quark} + H.C) \qquad (۳)$$

لاگرانژین مؤثر[۵] که شامل مزون‌های شبه عددی[۶] است در واپاشی‌های مزون ← لپتون + نوترینو برابر است با:

$$L_{eff} = (i)\, j^{\mu}_{Lepton} [\alpha_\pi \partial_\mu \phi^-_\pi + \alpha_K \partial_\mu \phi^-_K + \alpha_D \partial_\mu \phi^-_D \qquad (۴)$$
$$+ \alpha_{D_s} \partial_\mu \phi^-_{D_s} + \alpha_B \partial_\mu \phi^-_B + \alpha_{B_s} \partial_\mu \phi^-_{B_s} + ...] + H.C$$

در رابطهٔ بالا جای‌گذاری‌های زیر انجام شده است:

$$\bar{d} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u \ \to \ i f_\pi \partial^{\mu} \varphi^+_\pi \qquad (۵)$$
$$\bar{s} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u \ \to \ i f_k \partial^{\mu} \varphi^+_k$$

و غیره. همچنین میدان‌های $\partial^{\mu}\phi$ شبه بردار[۷] هستند؛ زیرا ϕ شبه عددی است. دامنهٔ این فرایند برابر است با:

$$\mathrm{M} = \alpha_i \phi_i p^{\mu}_i [\bar{u}_\nu (\gamma^{\mu} (1 - \gamma_5)/2) u_\ell] \qquad (۶)$$

اینجا :

$$\alpha_i = \sqrt{2} G_F f_i V_{ij} \qquad (۷)$$

و برای مثال $\phi^-_i (\phi^-_\pi)$ تابع موج مزون (پایون)، $p^{\mu}_i (p^{\mu}_\pi)$ چارممنتوم مزون (پایون) و $f_i (f_\pi)$ پارامتر دیمانسیون مزون (پایون) هستند. با استفاده از قانون بقای ممنتوم خواهیم داشت:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_\ell + \vec{p}_\nu \qquad (۸)$$

و با استفاده از معادله دیراک خواهیم داشت:

$$\left|\overline{\mathrm{M}}\right|^2 = \alpha^2_i m^2_\ell (p_\ell p_\nu) = \alpha^2_i m^2_\ell (M_i E_\nu) \qquad (۹)$$

۱.physics beyond the Standard Model ۲.purely leptonic ۳.helicity suppressed
۴.current matrix elements ۵.Effective Lagrangian ۶.pseudoscalar mesons ۷.pseudovector

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

اینجا $M_i(M_\pi)$ جرم مزون (پایون)، m_ℓ جرم لپتون و E_ν انرژی نوترینو در چارچوب ساکن مزون $(p_\ell p_\nu = (p_i - p_\nu).p_\nu) = p_i p_\nu = M_i E_\nu)$ است.

آهنگ زمانی دیفرانسیلی برای واپاشی $Q \to 1,2,...,n$ با عناصر ممنتوم $d^3p_1, d^3p_2, ..., d^3p_n$ برای حالت نهایی ذرات برابر است با:

$$d\Gamma = \frac{V}{2E_Q}|M|^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} .... \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}(2\pi)^4 \delta^4(P_Q - P_1 - ... - P_n) \qquad (۱۰)$$

بنا بر این آهنگ زمانی واپاشی مزون ← لپتون + نوترینو برابر است با:

$$\Gamma = \frac{1}{2M_i}\int \overline{|\mathrm{M}|}^2 \frac{dp_\ell}{2E_\ell(2\pi)^3}\frac{dp_\nu}{2E_\nu(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_\ell + p_\nu - p_i)$$

$$= \frac{1}{2M_i}\frac{1}{4\pi}\overline{|\mathrm{M}|}^2 \int \delta(\sqrt{E_\nu^2 + m_\ell^2} + E_\nu - M_i)\frac{E_\nu}{E_\ell}dE_\nu$$

$$= \frac{1}{2M_i}\overline{|\mathrm{M}|}^2 \frac{1}{4\pi}\frac{E_\nu}{M_i} \qquad (۱۱)$$

بعد از جای‌گذاری (۹) در (۱۱) و کمی ساده کردن خواهیم داشت:

$$\Gamma_{Leptonic} = \frac{\alpha_i}{4\pi}\frac{m_\ell^2(M_i^2 - m_\ell^2)}{4M_i^3} \qquad (۱۲)$$

با مقایسهٔ (۱۲) با نتایج تجربی، برای مثال با واپاشی لپتونی $\pi \to \mu\nu$، مقدار $f_\pi = 0.127\ GeV$ را به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین با استفاده از [۱۵] خواهیم داشت:

$$f_K = 1.21 f_\pi = 0.1536\ GeV$$
$$f_{D_s} = (2.5 \pm 0.6) f_\pi = 0.3175\ GeV \qquad (۱۳)$$

در نتیجه،

$$\alpha_\pi = 2.12\times10^{-9}\ GeV^{-1}$$
$$\alpha_K = 5.81\times10^{-10}\ GeV^{-1} \qquad (۱۴)$$
$$\alpha_{D_s} = (5.3 \pm 1.3)\times10^{-9}\ GeV^{-1}$$

با مقایسه کردن عناصرماتریس لاگرانژین مؤثر کوارک با لاگرانژین مؤثر مزون و به‌هنجارش آن خواهیم داشت:

$$\langle 0|u_{jL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{iL}|(\overline{u}_j d_i)_{PSmeson}\rangle = -(i/2) f_{meson}\langle 0|\partial^\mu \phi_{meson}|(\overline{u}_j d_i)_{PSmeson}\rangle \qquad (۱۵)$$
$$= -(1/2) f_{meson}(p^\mu_{meson}/\sqrt{2E_{meson}})$$

آهنگ زمانی تعدادی از واپاشی‌های لپتونی محاسبه و در جدول ۱ آورده شده است.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

واپاشی‌های نیمه لپتونی

دیاگرام کوارکی واپاشی‌های نیمه لپتونی در شکل ۲ نمایش داده شده است. لاگرانژین مؤثر برای $meson1_{PS} \to meson2_{PS} + \ell + \nu_\ell$، برای مثال $\pi \to \pi^0 \ell \nu$ ، $K \to \pi \ell \nu$ ، $D \to K \ell \nu$ و $B \to D \ell \nu$ با استفاده از رابطهٔ (۳) بدین‌صورت به‌دست می‌آید [۱۶]:

$$L_{eff} = \sqrt{2} G_F [\, j^{\mu}_{Leptonic}\, V_{ij}\, i\left[f_+ \partial_\mu(\phi_1\phi_2) + f_- \partial_\mu(\phi_1\phi_2)\right] + H.C]$$
$$= \sqrt{2} G_F [\, j^{\mu}_{Leptonic}\, V_{ij}\, i\left[f_+(\partial_\mu\phi_1\phi_2 - \phi_1\partial_\mu\phi_2) + f_-(\partial_\mu\phi_1\phi_2 + \phi_1\partial_\mu\phi_2)\right] + H.C] \qquad (۱۶)$$

در این رابطه جای‌گذاری $\bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u \to i[f_+\partial^\mu(\varphi_1\varphi_2) + f_-\partial^\mu(\varphi_1\varphi_2)]$ انجام شده است و ϕ_1 و ϕ_2 توابع موج مزون۱ و مزون۲ هستند. در حالت کلی پارامترهای f_+ و f_- که عامل‌های شکل[۱] نامیده می‌شوند، بدون دیمانسیون هستند و تابعی از q^2 اند. از آن‌جا که $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ و $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ هستند، و با صرف نظر کردن از وابستگی‌های کوچک انرژی در واپاشی‌های مزون‌ها، می‌توان فرض کرد که عامل‌های شکل به‌طور کامل از نظر فیزیکی تابعی از q^2 هستند [۱۷]:

$$f_-(q^2) \cong f_-(0) \qquad (۱۷)$$
$$f_+(q^2) \cong f_+(0)\,،$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از کنش[۲] $\int L_{eff}\, d^3x dt$ ، فاکتور ترکیب f_- برابر است با:

$$L_{eff} = -\sqrt{2} G_F (\partial^\mu j^{\mu}_{Leptonic})\; V_{ij}\; i\; f_-(\phi_1\phi_2) \qquad (۱۸)$$

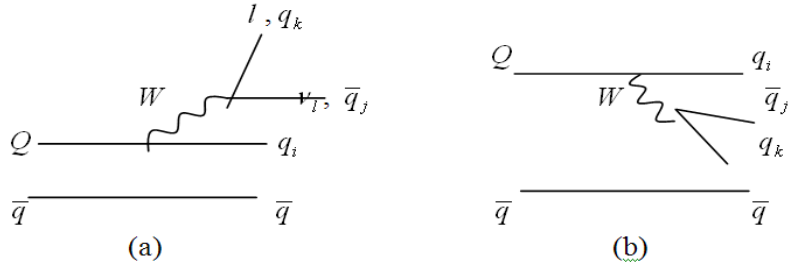
اما $\partial^\mu j^{\mu}_{Leptonic} \sim lepton\ mass$ تقریباً برابر جرم لپتون است و چون جرم لپتون‌ها ناچیز است پس می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد. بنا بر این، لاگرانژین مؤثر برابر می‌شود با:

$$L_{eff} = 2\sqrt{2} G_F [\, j^{\mu}_{Leptonic} (i/\sqrt{2}) V_{ij} f_{12} \left[\partial_\mu\phi_1\phi_2 - \phi_1\partial_\mu\phi_2)\right] + H.C] \qquad (۱۹)$$

این‌جا ،

$$f_{12} = f_+ / \sqrt{2} \qquad (۲۰)$$

حال با ذکر چندین مثال آهنگ زمانی واپاشی‌های مختلف نیمه لپتونی را به‌دست می‌آوریم:



شکل ۲. دیاگرام مدل کوارک برای واپاشی‌های مزون‌های مختلف،a) در حالت رنگی مجاز،b) در حالت رنگی فوق‌العاده

۱.form factors ۲.Action

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

$\pi \to \pi\, e\, \nu_e$: برای واپاشی $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$ ، می‌توانیم از جرم الکترون صرف نظر کنیم [۱۵]، در نتیجه آهنگ زمانی واپاشی بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\Gamma_{SL} = \frac{G_F^2\, M_{\pi^+\pi^0}^5}{30\pi^3} |V_{ud}|^2 \left|f_{\pi^+\pi^0}\right|^2 [1 - \frac{5m_e^2}{M_{\pi^+\pi^0}^2} - \frac{3}{2}\frac{M_{\pi^+\pi^0}}{m_{\pi^+}}] \qquad (۲۱)$$

اینجا $M_{\pi^+\pi^0} = m_{\pi^+} - m_{\pi^0}$ و فاکتور ترکیب طبق داده‌های آزمایشگاهی برابر $f_{\pi^+\pi^0} \cong 1.0$ است [۱۵]. برای بقیهٔ حالت‌ها می‌توان هم از جرم الکترون، و هم از جرم مزون‌های سبک صرف نظر کرد. در نتیجه آهنگ زمانی دیفرانسیلی برای پایین‌ترین مرتبه در تئوری اختلال بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\Gamma_{SL}}{dq^2} = \frac{G_F^2}{12\pi^3} |V_{ij}|^2 |f_{12}|^2\, p_2^3 \qquad (۲۲)$$

اینجا ،

$$p_2 = (1/2m_1)\sqrt{[q^2 - (m_1 + m_2)^2][q^2 - (m_1 - m_2)^2]} \qquad (۲۳)$$

و p_2 ممنتوم مزون۲ (مزون۱ در چارچوب ساکن) و q جرم ناوردای زوج لپتون- نوترینو است. با انتگرال گیری از (۲۳) آهنگ زمان واپاشی برابر می‌شود با:

$$\Gamma_{SL} = \frac{G_F^2\, m_1^5}{96\pi^3} |V_{ij}|^2 \int_0^{(1-x)^2} |f_{12}|^2 ([(1+x)^2 - y][(1-x)^2 - y])^{\frac{3}{2}} dy \qquad (۲۴)$$

اینجا ،

$$x = m_2 / m_1 \ , \qquad y = q^2 / m_1^2 \qquad (۲۵)$$

در حالت کلی فاکتور ترکیب f_{12} تابعی از q^2 است؛ زیرا برهم کنش‌های مؤثر غیرموضعی[۱] هستند. با صرف‌نظر کردن از وابستگی f_{12} به q^2 آهنگ زمان واپاشی برابر است با:

$$\Gamma_{SL} = \frac{G_F^2\, m_1^5}{192\pi^3} |V_{ij}|^2 (|f_{12}|^2 / 2)\beta(x) \qquad (۲۶)$$

اینجا ،

$$\beta(x) = 1 - 8x^2 + 8x^6 - x^8 - 24x^4 \ln(x) \qquad (۲۷)$$

اکنون می‌خواهیم لاگرانژین مؤثر را با لاگرانژین مدل استاندارد مقایسه کنیم. مطابق با (۳) دانسیتهٔ لاگرانژین برابر:

$$L = -2\sqrt{2} G_F (j^{\mu}_{Lepton}\ j^{\mu\dagger}_{Quark} + H.C) \qquad (۲۸)$$

در نتیجه،

$$\langle meson2 |\ u^{\dagger}_{jL} \tilde{\sigma}^{\mu} d_{iL} | meson1 \rangle = \frac{f_{12}}{\sqrt{2}} \frac{(p_1^{\mu} + p_2^{\mu})}{2\sqrt{E_1 E_2}} \qquad (۲۹)$$

با توجه به این‌که مزون۱ و مزون۲ در چارچوب ساکن هستند پس از اختلاف جرم‌ها نیز صرف‌نظر می‌کنیم:

۱.non local

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

$$\frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2\sqrt{E_1 E_2}} = (1,0,0,0) \text{ ، } \qquad (\mu = 0,1,2,3) \qquad (۳۰)$$

همچنین از آن‌جا که هر دو مزون‌ها شبه عددی هستند، فقط قسمت برداری توزیع جریان عناصر ماتریس باقی می‌مانند:

$$\langle meson2 | u_{jL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{iL} | meson1 \rangle = (1/2) \langle meson2 | \bar{u}_j \gamma^\mu d_i | meson1 \rangle \qquad (۳۱)$$

و چون هر دو مزون‌ها در چارچوب ساکن هستند،

$$\bar{u}_j \gamma^0 d_i = a_{u_j}^\dagger a_{d_i} - a_{\bar{d}_i}^\dagger a_{\bar{u}_j} \qquad (۳۲)$$

اینجا a_{d_i} به یک کوارک d_i و $a_{\bar{u}_j}$ به یک پادکوارک $\bar{u}_j$ واپاشیده می‌شوند. فاکتور $\bar{u}_j \gamma^0 d_i$ به‌طور ساده یک کوارک d_i را با یک کوراک u_j یا یک پادکوارک $\bar{u}_j$ را با یک پادکوارک $\bar{d}_i$ تعویض می‌کند. مطابق با (۳۰) الی (۳۲) عناصر ماتریس فاکتور کردن بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\langle meson2 | \bar{u}_j \gamma^\mu d_i | meson1 \rangle = (2 f_{12} / \sqrt{2})(1,0,0,0) = \sqrt{2} f_{12} (1,0,0,0) \qquad (۳۳)$$

برای $\mu = 0$ خواهیم داشت:

$$\langle meson2 | \bar{u}_j \gamma^0 d_i | meson1 \rangle = \sqrt{2} f_{12} \qquad (۳۴)$$

برای مثال با انتخاب مزون۱ $= \pi^-$ و مزون۲ $= \pi^0$ عناصر ماتریس فاکتور کردن برابر می‌شود با:

$$\langle \pi^0((u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}) | \bar{u}_j \gamma^\mu d_i | \pi^-(\bar{u}d) \rangle = (1/\sqrt{2}) \times 2 = \sqrt{2} \qquad (۳۵)$$

مقدار عددی ۲ ناشی از دو دیاگرام فاینمن مربوط به این واپاشی و $f_{12} = 1.0$ است. در جدول ۲ فاکتور ترکیب واپاشی‌های مختلف بر اساس رابطهٔ زیر محاسبه شده است [۱۵]:

$$f_{12}(p_2) = f_{12}(0) \frac{M' - (m_1 - m_2)^2}{M'^2 - q^2} \qquad (۳۶)$$

M' جرم مزون برداری $d_i \bar{u}_j$ با کم‌ترین جرم است، برای مثال $\rho^\pm$ در واپاشی $\pi^+ \to \pi^0$ و q^2 در محدودهٔ $0 < q^2 < (m_1 - m_2)^2$ است. اگر $q^2 = (m_1 - m_2)^2$ انتخاب شود، ممنتوم مزون۲ صفر می‌شود $(p^2 = 0)$ و همانند مزون۱ که در چارچوب ساکن دارای ممنتوم صفر بود، می‌شود. بنا بر این در واپاشی $\pi^- \to \pi^0$ هر دو مزون‌های ۱ و۲ را در چارچوب ساکن در نظر می‌گیریم و از اختلاف جرم‌های آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. مدلی که برای f_{12} مطابق (۳۶) پیشنهاد کردیم ساده‌ترین مدل کوارک است؛ مثلاً برای واپاشی $K^+ \to \pi^0$ فاکتور $1/2$ ناشی از K^+ و فاکتور $1/\sqrt{2}$ ناشی از $\pi^0 = (1/\sqrt{2})(u\bar{u} - d\bar{d})$ است، در نتیجه

$$f_{K^+\pi^0} = 1/2 \qquad \to \qquad f_{K^+\pi^0}/\sqrt{2} = 1/2\sqrt{2} \qquad (۳۷)$$

فاکتور $1/2$ ناشی از رأس بوزون W (vertex W-boson) و خط کوارک ناشی از میدان کوارک چپ‌گرد

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

$\gamma^\mu(1-\gamma_5)/2 \to \gamma^\mu/2$ است؛ زیرا توزیع برداری جریان هنگامی‌که ممنتوم مزون ۳ صفر باشد به‌صورت $\gamma^0/2$ ظاهر می‌شود.

$\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \to i[f_+\partial^\mu(\varphi_B\varphi_\pi) + f_-\partial^\mu(\varphi_B\varphi_\pi)]$ تعویض $\bar{B}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$: برای واپاشی $\boldsymbol{B \to \pi\, e\, \nu_e}$ را انجام داده و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء از کنش مؤثر[۱] جملات بر حسب جرم الکترون به‌دست می‌آیند که در نتیجه می‌توان از جملهٔ فاکتور ترکیب f_- صرف‌نظر کرد [۱۸]. فاکتور ترکیب f_+ تابعی از $q' = (p_B - p_\pi)^2$ یا $q' = (p_e - p_{\nu_e})^2$ است، در نتیجه

$$\left\langle \pi^+ \left| \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \right| \bar{B}^0 \right\rangle = (f_+ / \sqrt{2E_B}\sqrt{2E_\pi})(p_B + p_\pi)^\mu \qquad (۳۸)$$

فاکتور ترکیب f_+ به‌وسیلهٔ واپاشی $\bar{B}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ به‌دست می‌آید و آهنگ زمانی دیفرانسیلی این واپاشی برابر است با [۱۹]:

$$\frac{d\Gamma}{dq'} = \frac{G_F^2}{24\pi^3}|V_{ub}|^2 |f_+(q')|^2 p_\pi^3 \qquad (۳۹)$$

این‌جا

$$p_\pi = (m_B/2)\sqrt{[(1+x)^2 - (q/m_B^2)][(1-x)^2 - (q/m_B^2)]} \qquad (۴۰)$$

$$x = m_\pi / m_B$$

با صرف‌نظر کردن از وابستگی فاکتور ترکیب f_+ به q' و انتگرال‌گیری روی q'، آهنگ زمانی واپاشی برابر است با:

$$\Gamma_{SL} = \frac{G_F^2\, m_B^5}{768\pi^3}|V_{ij}|^2 |f_+(q')|^2 \beta(x) \qquad (۴۱)$$

این‌جا $\beta(x)$ با (۲۷) داده شده است و آهنگ زمانی واپاشی برای $B^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ به‌طور تجربی برابر [۲۰] : $\Gamma_{SL} = (1.8 \pm 0.6)\times 10^{-4}\Gamma_{total}$ است که $\Gamma_{total} = \hbar/\tau_{B^0} = 4.22\times 10^{-13} GeV$ است. با فرض $f_+(q') = constant = f_+(0)$ مقدار $f_+(0) = 0.56 \pm 0.10$ به‌دست می‌آید.

برای حالتی که فاکتور ترکیب وابسته به q' باشد، البته در نواحی که q' خیلی بزرگ نباشد، می‌توان از این رابطه استفاده کرد [۲۱]:

$$f_+(q') = f_+(0)/[1 - (q'/m_B^2)] \qquad (۴۲)$$

با انتخاب $m_B = 5.235 GeV$ مقدار $f_+(0) = 0.41 \pm 0.10$ به‌دست می‌آید. این فاکتور ترکیب در [۲۲] دارای مقدار $f_+(0) = 0.275 \pm 0.025$ است.

۱.effective action

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

$B \to \rho\, e\nu_e$: برای واپاشی $\overline{B}^0 \to \rho^+ e^- \overline{\nu}_e$ با استفاده از [۲۳] تعویض زیر را انجام می‌دهیم:

$$\left\langle \rho^+ \left| \overline{u}\gamma^\mu (1-\gamma_5) b \right| \overline{B}^0 \right\rangle = (m_\rho / \sqrt{2E_B}\sqrt{2E_\rho})[f_1 \varepsilon^\mu + f_2 (\varepsilon . p_B / m_B^2)(p_B + p_\rho)^\mu \quad (۴۳)$$
$$\times (2i/m_B^2) g \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_\nu p_{\rho\alpha} p_{B\beta}]$$

هنگامی‌که ρ در حالت هلیسیته صفر است، جملهٔ $g\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ در رابطهٔ بالا نقشی ندارد. دقت شود که f_1 ، f_2 و g بدون دیمانسیون هستند و ε^μ بردار پلاریزیشن ρ است. ملاحظه می‌کنیم که

$$p_B = (m_B,0,0,0) \quad , \quad p_\rho = (E_\rho,0,0,p_\rho) \ , \quad \varepsilon = (p_\rho,0,0,E_\rho)/m_\rho \quad (٤٤)$$

و $q' = (p_B - p_\rho)^2 = (p_e + p_{\nu_e})^2$ ممنتوم عبوری است. اجازه بدهید زاویهٔ بین e^- و $\vec{p}_\rho$ در چارچوب ساکن زوج $e^-\overline{\nu}_e$ را θ در نظر بگیریم. در این حالت آهنگ زمانی واپاشی برابر است با:

$$\frac{d\Gamma}{dq' d(\cos\theta)} = \frac{G_F^2}{16(2\pi)^3}\frac{p_\rho}{m_B^2}[\left|\sqrt{q'}F_+\right|^2 (1+\cos\theta)^2/2$$
$$+\left|\sqrt{q'}F_-\right|^2 (1-\cos\theta)^2/2 + \left|\sqrt{q'}F_0\right|^2 \sin^2\theta] \quad (۴۵)$$

اینجا F_+ ، F_- و F_0 مربوط به هلیسیتهٔ مثبت، منفی و صفر ρ^+ است. همچنین،

$$\left|\sqrt{q'}F_+\right|^2 = q' m_\rho^2 (f_1 - g)^2$$
$$\left|\sqrt{q'}F_-\right|^2 = q' m_\rho^2 (f_1 + g)^2$$
$$\left|\sqrt{q'}F_0\right|^2 = [f_1(m_B E_\rho - m_\rho^2) + 2f_2 p_\rho{}^2]^2 \quad (۴۶)$$

در نتیجه آهنگ زمانی دیفرانسیلی برابر می‌شود با:

$$\frac{d\Gamma}{dq'} = \frac{G_F^2}{12(2\pi)^3}\frac{p_\rho q'}{m_B^2}[|F_+|^2 + |F_-|^2 + |F_0|^2] \quad (۴۷)$$

به علاوه، ممنتوم عبوری در چارچوب ساکن مزون B برابر است با:

$$q' = (p_B - p_\rho)^2 = m_B^2 + m_\rho^2 - 2m_B E_\rho$$
$$E_\rho = (m_B/2)[1 + (m_\rho/m_B)^2 - (q'/m_b^2)] \quad (۴۸)$$

برای مقادیر کوچک q' و صرف‌نظر کردن از جمله $(m_\rho/m_B)^2 = 0.022$ نتیجه می‌شود که $E_\rho \approx p_\rho \approx m_B/2$ و $\left|\sqrt{q'}F_0\right|^2 = m_B^4[(f_1+f_2)/2]^2$، در نتیجه آهنگ زمانی دیفرانسیلی برابر می‌شود با:

$$\frac{d\Gamma}{dq'} = \frac{G_F^2 m_B^3}{192\pi^3}(1-\frac{q'}{m_B^2})\{(2q'/m_B^2)(m_\rho/m_B)^2(f_1^2+g^2)$$
$$+[(f_1/2)+(f_2/2)(1-(q/m_B^2))]^2(1-(q/m_B^2))^2\} \quad (۴۹)$$

آهنگ زمانی تعدادی از واپاشی‌های نیمه لپتونی محاسبه و در جدول ۳ آورده شده است.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از روش فاکتور کردن، واپاشی‌های لپتونی و نیمه لپتونی مزون B به‌دست آمده است. با فرض الحاق یک کوارک- پادکوارک در این مدل و ساختن دامنهٔ پراکندگی به اساس آن توانستیم آهنگ واپاشی‌های مختلف مزون B را بر اساس مدل کوارکی آن محاسبه کنیم. همچنین برای انطباق نتایج تجربی و تئوری از فاکتورهای ترکیب مربوط به هر واپاشی طبق مدل f_{12} که در این تحقیق به‌دست آمده است، در محاسبه دامنه واپاشی‌های مختلف مزون B استفاده کرده‌ایم. نشان دادیم که آهنگ زمانی واپاشی‌های لپتونی و نیمه لپتونی مزون B در این مدل با نتایج تجربی انطباق خوبی دارند.

جدول ۱. آهنگ زمانی بعضی از واپاشی‌های لپتونی به روش فاکتور کردن

فرآیندها	آهنگ زمانی واپاشی‌ها
$\pi^+ \to e^+\nu_e$	3.0128E-21
$\pi^+ \to \mu^+\nu_e$	2.3548E-17
$K^+ \to e^+\nu_e$	8.0148E-22
$K^+ \to \mu^+\nu_e$	3.1289E-17
$D_s^+ \to e^+\nu_e$	2.6531E-19
$D_s^+ \to \mu^+\nu_e$	1.1309E-14

جدول ۲. فاکتور ترکیب f_{12} ، $f_{12}(0)$ و $f_{12}(model)$ برای واپاشی‌های نیمه لپتونی ($meson1 \to meson2 + e + \nu_e$) در روش فاکتور کردن

$meson1$	$meson2$	V_{CKM}	f_{12}	$f_{12}(0)$	$f_{12}(model)$
π^+	π^0	V_{ud}	1.00	1.00	1.00
K^+	π^0	V_{us}	0.515	0.588	0.5
K_s^0	π^-	V_u	0.503	0.573	0.5
K_L^0	π^-	V_u	0.503	0.573	0.5
D^+	$\overline{K}^0$	V_{cs}	0.532	0.806	0.707
D^+	π^0	V_{cd}	0.538	1.655	0.5
D^0	K^-	V_{cs}	0.614	0.928	0.707
D^0	π^-	V_{cd}	0.707	2.11	0.707
D_s^+	η	V_{cs}	0.438	0.692	0.408
D_s^+	η'	V_{cs}	1.464	1.77	0.577
B^+	$\overline{D}^0$	V_{cb}	0.450	-----	0.707
B^+	π^0	V_{ub}	0.5	-----	0.5
B^0	D^-	V_{cb}	0.501	-----	0.707
B^0	π^-	V_{ub}	0.364	0.387	0.707

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

جدول ۳. آهنگ زمانی بعضی از واپاشی‌های نیمه لپتونی به روش فاکتور کردن

فرآیندها	آهنگ زمانی واپاشی‌ها
$\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	2.3954E-25
$K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	2.3548E-17
$K_s^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$	2.4276E-18
$K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$	2.4276E-18
$D^+ \to \overline{K}^0 e^+ \nu_e$	4.1734E-14
$D^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	3.5336E-15
$D^0 \to K^- e^+ \nu_e$	2.8336E-15
$D^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$	6.0232E-15
$D_s^+ \to \eta\ e^+ \nu_e$	3.4991E-14
$D_s^+ \to \eta' e^+ \nu_e$	1.2245E-14
$B^+ \to \overline{D}^0 e^+ \nu_e$	6.1612E-15
$B^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$	1.1426E-16
$B^0 \to D^- e^+ \nu_e$	5.8225E-17
$B^0 \to \pi^0 e^+ \nu_e$	7.5622E-17

منابع

1. T. Becher, M. Neubert, B. D. Pecjak, Asymptotics of QCD Factorization in Exclusive Hadronic Decays of B Mesons, Nucl. Phys. B619 (2001) 538.
2. S. Stone, Experimental Results in Heavy Flavor Physics, Eur. Phys. J. C33 (2004) 129.
3. Z. Song, K. T. Chao, Problems of QCD factorization in exclusive decays of B meson to charmonium, Phys. Lett. B568 (2003) 127.
4. M. Beneke, M. Neubert, QCD factorization for $B \to PP$ and $B \to PV$ decays, Nucl. Phys. B675 (2003) 333.
5. B. Z. Kopeliovich, J. Nemchik, A. Schaefer, A.V. Tarasov, Color Transparency versus Quantum Coherence in Electroproduction of Vector Mesons off Nuclei, Phys. Rev. C65 (2002) 035201.
6. T. Iwama, A. Kohama, K. Yazaki, Nuclear Transparency in a Relativistic Quark Model, Nucl. Phys. A627 (1997) 620.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

7. M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubret, T. Sachrajda, QCD Factorization for $B \to \pi\pi$ Decays: Strong Phases and CP Violation in the Heavy Quark Limit, Phys. Rev. Lett. 83 (1999)1914.

8. B. P. Kersevan, E. R. Was, Improved Phase Space Treatment of Massive Multi-Particle Final States, Eur. Phys. J. C39 (2005) 439.

9. D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, Semileptonic decays of heavy baryons in the relativistic quark model, Phys. Rev. D73 (2006) 094002.

10. J. Nemchik, Study of Color Transparency in Production of Vector Mesons off Nucle, Czech. J. Phys. 53 (2003) 301.

11. R. Aleksan, T. Petersen, A. Soffer, Measuring the Weak Phase gamma in Color Allowed $B \to DK\pi$ Decays, Phys. Rev. D67 (2003) 096002.

12. J. O. Eeg, S. Fajfer, A. Hiorth, On the Colour Suppressed Decay Modes $B^0 \to D_s D_s$ and $\overline{B}^0 \to D^+ D^-$, Phys. Lett. B570 (2003) 46.

13. I. Z. Rothstein, Factorization, Power Corrections and the Pion Form Factor, Phys. Rev. D70 (2004) 054024.

14. W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, Cambridge University Press (1998).

15. A. Ali, C. Greub, An analysis of two-body non-leptonic B decays involving light mesons in the standard model, Phys. Rev. D57 (1998) 2996.

16. T. Huang, X. G. Wu, X.H. Wu, Pion Form Factor in the k Factorization Formalism, Phys. Rev. D70 (2004) 053007.

17. A. V. Belitsky, X. Ji, F. Yuan, Perturbative QCD Analysis of the Nucleon's Pauli Form Factor $F_2(Q^2)$, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 092003.

18. A. P. Bakulev, K. Passek-Kumericki, W. Schroers, N. G. Stefanis, Pion form factor in QCD: From nonlocal condensates to NLO analytic perturbation theory, Phys. Rev. D70 (2004) 033014.

19. L. B. Okun, Leptons and Quarks, Cambridge University Press (1982).

20. C. Amsler et al., Particle Data Group, Phys. Lett. B. 667 (2008) 1.

21. H. Y. Cheng, C. K. Chua, A. Soni, Final state interaction in hadronic B decays, Phys.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]

Rev. D. 71 (2005) 014030.

22. M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, C. T. Sachrajda, QCD factorization for exclusive, nonleptonic B meson decays: General arguments and the case of heavy-light final states, Nucl. Phys. B591 (2000) 313.

23. J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, Dynamics of the Standard Model, Cambridge University Press (1992).

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-03]