

## روش بوت‌استرپ برای تعیین حدود کنترل میانگین فرآیند آماری

\* نصراله ایران‌پناه، مرتضی مختاری‌مقدم: دانشگاه اصفهان

### چکیده

معمولاً عمل‌کرد يك فرآیند تولیدی به‌وسیله نمودارهای شوهارت که ابزاری برای کشف انحراف‌های با دلیل و بهبود فرآیند با کاهش تغییرپذیری است، تحت نظارت و کنترل قرار می‌گیرد. هنگامی که توزیع فرآیند نرمال نباشد این‌گونه نمودارها کارایی ندارند. روش بوت‌استرپ يك خانواده از روش‌های باز نمونه‌گیری است که می‌تواند بدون فرض نرمال بودن مشاهده‌ها در کنترل کیفیت آماری استفاده شود. در مقاله‌های متعددی تنها از روش فاصله اطمینان صدکی برای تعیین حدود کنترل استفاده شده است. در این مقاله علاوه بر فاصله‌های اطمینان صدکی بوت‌استرپ،  $t$ -بوت‌استرپ، تصحیح اریبی شتابیده (BCa) و فاصله اطمینان تقریبی بوت‌استرپ (ABC) برای تعیین حدود کنترل میانگین فرآیند استفاده می‌شوند. سپس در يك بررسی شبیه‌سازی از این فواصل اطمینان بوت‌استرپ برای حدود کنترل میانگین استفاده و مقایسه می‌شوند. در نهایت این حدود کنترل بوت‌استرپ برای نمودار میانگین داده‌های میزان گاز CO2 در نوشابه‌سازی کارخانه زمزم اصفهان استفاده می‌شود.

### مقدمه

از اهداف اصلی کنترل فرآیند آماری، پی بردن سریع به‌وجود انحراف‌های با دلیل یا تغییرات در فرآیند قبل از تولید تعداد زیادی محصول معیوب است. پس از آن، علل چنین انحراف‌هایی بررسی می‌شود و اقدامات اصلاحی انجام می‌گیرد. نمودارهای کنترل یکی از روش‌های کنترل فرآیند در حین تولید است. نمودارهای کنترل شامل يك خط مرکز که مقدار متوسط مشخصه را در حالت تحت کنترل نشان می‌دهد و همچنین دو خط افقی دیگر است که حد کنترل بالا (UCL) و حد کنترل پایین (LCL) را نشان می‌دهد. این حدود کنترل به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اگر فرآیند تحت کنترل باشد، تقریباً همه نقاطی که بر اساس اطلاعات نمونه محاسبه شده‌اند بین این حدود واقع می‌شوند و تا زمانی که نقاط بین حدود کنترل قرار گیرند، فرض می‌شود فرآیند تحت کنترل است و نیازی به فعالیت‌های اصلاحی نیست. اگر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل رسم شود یا نقاط دارای روند غیرتصادفی باشند، در نتیجه، فرآیند در شرایط خارج از کنترل قرار دارد و اقدامات اصلاحی نیاز است تا منبع ایجاد انحراف با دلیل تعیین و حذف گردد. یکی از بهترین نمودارهای کنترل نمودارهای کنترل شوهارت است. دو مشخصه مهم در کنترل فرآیند آماری تحت کنترل قرار دادن مرکز و تغییرپذیری فرآیند است. در این مقاله

واژه‌های کلیدی: نمودار کنترل میانگین، فاصله اطمینان صدکی بوت‌استرپ،  $t$ -بوت‌استرپ، BCa، ABC

پذیرش ۹۰/۷/۱۷

دریافت ۸۹/۱۰/۲۰

\*نویسنده مسئول

حدود کنترل شوهارت  $\bar{X}$  را برای کنترل مرکز فرآیند در نظر می‌گیریم. فرض نرمال بودن مشاهدات از فرضیه‌های اصلی، استفاده از حدود کنترل شوهارت است. حال اگر مشخصه مورد نظر دارای توزیعی متفاوت با توزیع نرمال باشد آنگاه می‌توان با توجه به قضیه حد مرکزی حدود کنترل را باز هم طراحی کرد. اما باید به این نکته توجه داشت که حجم نمونه در کنترل کیفیت معمولاً برابر ۴، ۵ یا ۶ است. لذا نتایج به‌دست آمده با توجه به قضیه حد مرکزی چندان معتبر نخواهد بود. در این حالت می‌توان از روش بوت‌استرپ استفاده کرد. مقاله‌های متعددی روش بوت‌استرپ را برای طراحی حدود کنترل فرآیند آماری وقتی که توزیع فرآیند نامعلوم باشد پیشنهاد کرده‌اند. بجگیر [۱] فاصله اطمینان صدکی بوت‌استرپ را برای تعیین ساختار حدود کنترل نمودارهای شوهارت به‌کار برد. فرانکلین و واسرمن [۵] حدود اطمینان بوت‌استرپ را برای کارایی فرآیند بررسی کردند. سپالا و همکاران [۹] کنترل فرآیند آماری را از طریق زیرگروه‌های بوت‌استرپ بررسی کردند. لیو و تانگ [۶] نمودارهای کنترل را برای مشاهدات مستقل و وابسته بر اساس روش بوت‌استرپ به‌کار بردند. وو و وانگ [۱۱] و وود و همکاران [۱۲] روش بوت‌استرپ مدل وابسته را برای تحلیل حدود کنترل بررسی کردند. تیاراچاکول و همکاران [۱۰] يك روش بوت‌استرپ پیشرفته‌تر بر اساس تحلیل باقیمانده‌ها برای نمودارهای کنترل فرآیند آماری پیشنهاد کردند. پارک [۸] بر اساس روش بوت‌استرپ حدود کنترل را برای نمودار کنترل میانه فرآیند ارائه کرد. در همه فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ استفاده شده در مراجع بالا، فقط فاصله اطمینان صدکی بوت‌استرپ برای تعیین حدود کنترل استفاده شده است. در این مقاله علاوه بر فاصله اطمینان صدکی بوت‌استرپ، فاصله‌های اطمینان  $t$ -بوت استرپ،  $BCa$  و  $ABC$  برای تعیین حدود کنترل استفاده و مقایسه شده است.

در این مقاله، ابتدا روش و فاصله‌های اطمینان صدکی بوت استرپ،  $t$ -بوت استرپ، فاصله اطمینان  $BCa$  و  $ABC$  را ارائه می‌کنیم. سپس در يك پژوهش شبیه‌سازی مقایسه میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ را برای سه توزیع نرمال، لگ نرمال و خیدو انجام می‌دهیم. انتخاب این سه توزیع برای بررسی اثر چولگی است، توزیع نرمال به‌عنوان توزیع فاقد چولگی و توزیع‌های لگ نرمال و خیدو به‌عنوان توزیع‌های دارای چولگی انتخاب شده‌اند. در این پژوهش شبیه‌سازی اثر چولگی، پارامترهای توزیع و حجم نمونه را بر روی حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ بررسی می‌کنیم. ملاک مقایسه میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت‌استرپ میانگین طول فاصله اطمینان و احتمال پوشش است. در نهایت برای داده‌های واقعی میزان  $CO_2$  نوشابه در کارخانه زمزم، حدود کنترل میانگین را به‌وسیله بوت‌استرپ به‌دست می‌آوریم.

### روش و فاصله‌های اطمینان بوت استرپ

افرون [۲] روش بازنمونه‌گیری بوت‌استرپ را برای برآورد اندازه دقت برآوردگرها پیشنهاد کرد. فرض کنید  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  نمونه‌ای با توزیع نامعلوم  $F_\theta$  و  $\hat{\theta} = t(X)$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  باشد. در الگوریتم

بوت استرپ ابتدا نمونه بوت استرپ  $X^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$  را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از نمونه مشاهده شده  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  به دست می‌آوریم. سپس برآوردگر بوت استرپ  $\hat{\theta}^* = t(x^*)$  را محاسبه می‌کنیم. مراحل قبل را  $B$  بار تکرار کرده و  $B$  برآوردگر بوت استرپ  $\{\hat{\theta}_b^*; b=1, \dots, B\}$  را به دست می‌آوریم. در نهایت برآوردگر تجربی اریبی، خطای استاندارد و توزیع برآوردگر  $\hat{\theta}$  را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌های اطمینان صدکی بوت استرپ،  $t$ -بوت استرپ، BCa، و ABC برای پارامتر مجهول  $\theta$  بدین صورت ارائه می‌شود:

### ۱. فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ

افزون [۲] فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ را معرفی کرد. فرض کنید  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  نمونه مستقل و هم‌توزیع به اندازه  $n$  از جامعه‌ای با پارامتر مجهول  $\theta$  باشد. برآوردگر  $\hat{\theta}$  را برای پارامتر  $\theta$  در نظر می‌گیریم. در الگوریتم بوت استرپ ابتدا نمونه بوت استرپ  $X^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$  را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از نمونه‌های مشاهده شده  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  به دست می‌آوریم. سپس برآوردگر بوت استرپ  $\hat{\theta}^*$  را محاسبه می‌کنیم. در نهایت با تکرار  $B$  بار مراحل قبل برآوردگرهای بوت استرپ  $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$  را به دست می‌آوریم. در این صورت فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ با ضریب  $1-\alpha$  بدین صورت به دست می‌آید:

$$\theta \in \left( \hat{\theta}_{[B(\frac{\alpha}{2})]}^*; \hat{\theta}_{[B(1-\frac{\alpha}{2})]}^* \right)$$

که در آن  $\hat{\theta}_{[j]}^*$ ،  $j$ -امین مقدار مرتب شده برآوردگرهای بوت استرپ  $\hat{\theta}_b^*; b=1, \dots, B$  است.

### ۲. فاصله اطمینان $t$ -بوت استرپ

افزون [۳] فاصله اطمینان  $t$ -بوت استرپ را معرفی کرد. در این روش که بر اساس کمیته محوری مشابه کمیت محوری آماره  $t$ -استیودنت است، توزیع آماره مستقیماً از روی داده‌ها برآورد می‌گردد. برای تشکیل فاصله اطمینان  $t$ -بوت استرپ با در نظر گرفتن برآوردگر  $\hat{\theta}$  مانند روش فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ ابتدا برآوردگر بوت استرپ  $\hat{\theta}^*$  را محاسبه می‌کنیم. سپس تابع محوری بوت استرپ  $\hat{t}^* = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{\hat{s}_e^*}$  را محاسبه می‌کنیم که در آن  $\hat{s}_e^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta})^2}$ ، برآوردگر بوت استرپ خطای استاندارد برآوردگر  $\hat{\theta}$  بر اساس  $B_1$  نمونه بوت استرپ است. در نهایت با تکرار  $B$  بار مراحل قبل توابع محوری بوت استرپ  $\hat{t}_1^*, \dots, \hat{t}_B^*$  را به دست می‌آوریم. در این صورت فاصله اطمینان  $t$ -بوت استرپ با ضریب  $1-\alpha$  بدین صورت به دست می‌آید:

$$\theta \in \left( \hat{\theta} - \hat{t}_{[B(1-\frac{\alpha}{2})]}^* \hat{s}_e(\hat{\theta}); \hat{\theta} - \hat{t}_{[B(\frac{\alpha}{2})]}^* \hat{s}_e(\hat{\theta}) \right)$$

که در آن  $\hat{t}_{[j]}^*$ ،  $j$ -امین مقدار مرتب شده توابع محوری بوت استرپ  $\{\hat{t}_b^*; b=1, \dots, B\}$  است. این روش به‌ویژه برای آماره‌های مکانی نظیر میانگین، میانگین پیراسته، میانه یا صدک‌های نمونه‌ای بسیار خوب عمل می‌کند

(افرون [۳]).

**۳. فاصله اطمینان BCa**

یکی از اهداف اصلی نظریه بوت استرپ به دست آوردن فاصله‌های اطمینان با دقت پوشش زیاد است. فاصله اطمینان  $t$ -بوت استرپ احتمال پوشش زیادی دارد اما در عمل همیشه رفتار منظمی ندارد (افرون [۴]). فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ هر چند رفتارهای نامنظم کمی دارد، اما سرعت همگرایی آن ضعیف است (افرون [۴]). افرون یک نسخه ویرایش شده فاصله صدکی با نام فاصله اطمینان تصحیح اریبی شتابیده BCa با دو مقدار تصحیح اریبی  $\hat{Z}_0$  و شتاب  $\hat{a}$  معرفی کرد که دو مشکل مذکور را ندارد. در این روش  $\hat{Z}_0$  بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\hat{Z}_0 = \Phi^{-1} \left( \frac{\#\{\hat{\theta}_b^* < \hat{\theta}\}}{B} \right)$$

که در آن  $\{\hat{\theta}_b^*; b=1, \dots, B\}$  برآوردگرهای بوت استرپ و  $\Phi$  تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.  $\hat{Z}_0$  میانه اریبی  $\hat{\theta}^*$  را اندازه می‌گیرد و اگر  $\hat{Z}_0 = 0$  شود به این معناست که  $\hat{\theta}$  میانه مقادیر  $\hat{\theta}_b^*$  است. از طرف دیگر مقدار  $\hat{a}$  به این دلیل شتاب نامیده می‌شود که نسبت تغییرات خطای استاندارد برآوردگر  $\hat{\theta}$  به پارامتر  $\theta$  را اندازه می‌گیرد. روش‌های زیادی برای محاسبه  $\hat{a}$  وجود دارد که ساده‌ترین آن‌ها برآورد  $\hat{a}$  به روش جک نایف است. فرض کنید  $X_{(i)}$  نمونه‌ای با حذف  $i$ -امین مشاهده از نمونه  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  باشد و  $\hat{\theta}_{(i)} = t(X_{(i)})$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  با حذف مشاهده  $i$ -ام باشد. سپس  $U_i = \hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(0)}$  تعریف می‌کنیم که در آن

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i^3}{6 \left[ \sum_{i=1}^n U_i^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \hat{\theta}_{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{(i)}$$

در نهایت برآورد  $\hat{a}$  به صورت محاسبه می‌گردد. در این صورت

$$\theta \in \left( \hat{\theta}_{[B(1-\frac{\alpha}{2})]}^* ; \hat{\theta}_{[B(\frac{\alpha}{2})]}^* \right) \quad \text{بصورت } 1-\alpha \text{ بوت استرپ با ضریب}$$

$$\frac{\bar{\alpha}}{2} = \left( \hat{Z}_0 + \frac{\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \hat{a}(\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}})} \right) \quad \text{و} \quad \frac{\bar{\alpha}}{2} = \left( \hat{Z}_0 + \frac{\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \hat{a}(\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}})} \right) \quad \text{که در آن}$$

به دست می‌آید،

**۴. فاصله اطمینان ABC**

یکی از نقاط ضعف فاصله اطمینان بوت استرپ BCa تعداد زیاد بازنمونه‌گیری‌ها است و زمان زیادی برای محاسبات لازم دارد. افرون [۴] تقریبی مناسب از فاصله اطمینان BCa به نام فاصله اطمینان تقریبی بوت استرپ ABC معرفی کرد. فاصله اطمینان ABC نتایج نمونه‌گیری تصادفی بوت استرپ را به بسط تیلور تقریب می‌زند. فرض کنید  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  و  $\mathbf{X}^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$  به ترتیب نمونه‌ای مشاهده شده و نمونه بوت استرپ

باشد. اگر بردار بازنمونه‌گیری بوت استرپ را با  $\mathbf{P}^* = (P_1^*, \dots, P_m^*)$  که در آن  $P_i^* = \frac{N_i^*}{n}$  و  $N_i^*$  تعداد مشاهدات بوت استرپ که برابر با مشاهده  $i$  ام  $x_i$  است نشان دهیم، آن‌گاه  $n P^*$  دارای توزیع چند جمله‌ای با احتمال‌های  $P^* = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)'$  است. آماره مورد نظر به صورت  $\hat{\theta} = T(P^*)$  خواهد بود. تقریب خطای استاندارد  $\hat{\theta}$  به صورت  $\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n T_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$  است که در آن  $T$  به صورت  $T = \frac{T((1-\varepsilon)P^* + \varepsilon e_i) - T(P^*)}{\varepsilon}$  و  $T_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty}$  و  $e_i$   $i$ -امین بردار هم رتبه با مختصات  $(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$  است. فاصله اطمینان  $ABC$  با ضریب  $1-\alpha$  به صورت  $\theta \in (\hat{\theta}_{ABC[1-\frac{\alpha}{2}]}; \hat{\theta}_{ABC[\frac{\alpha}{2}]})$  بدست می‌آید که در آن  $\hat{\theta}_{ABC[1-\frac{\alpha}{2}]} = T\left(P^* + \lambda_2 \frac{\hat{\delta}}{\hat{\sigma}}\right)$  و  $\hat{\theta}_{ABC[\frac{\alpha}{2}]} = T\left(P^* + \lambda_1 \frac{\hat{\delta}}{\hat{\sigma}}\right)$  همچنین  $\lambda_1 = \frac{\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\hat{a})(\hat{Z}_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}})}$  و  $\lambda_2 = \frac{\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}}{(1-\hat{a})(\hat{Z}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}})}$  هستند.  $\hat{\delta} = \hat{T}(P^*)$

### مطالعه شبیه‌سازی

برای مقایسه میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت استرپ برای میانگین فرآیند، مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از نمونه‌هایی از توزیع‌های نرمال، لگ نرمال و خدو طراحی می‌کنیم. انتخاب این سه توزیع برای بررسی اثر چولگی است، توزیع نرمال به‌عنوان توزیع فاقد چولگی و توزیع‌های لگ نرمال و خدو به‌عنوان توزیع‌های دارای چولگی انتخاب شده‌اند. در این مطالعه شبیه‌سازی اثر چولگی، پارامترهای توزیع و حجم نمونه را بر روی حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت استرپ بررسی می‌کنیم. ملاک مقایسه میان حدود کنترل شوهارت و فاصله‌های اطمینان بوت استرپ میانگین طول فاصله اطمینان و احتمال پوشش است. روش کار به این صورت است که به‌عنوان مثال برای توزیع نرمال استاندارد در اولین سطر جدول ۱ ابتدا  $m=25$  نمونه به حجم  $n=5$  تولید می‌کنیم. حدود کنترل شوهارت  $3\sigma$  برای میانگین فرآیند به صورت  $UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$  و  $CL = \bar{\bar{x}}$  و  $CL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$  است که در  $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}{m}$ ،  $\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n}$ ،  $R = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}$  و  $R_i$  دامنه نمونه  $n$  تایی  $i$  ام ( $i = 1, \dots, m$ ) است. همچنین  $A_2$  به ازای اندازه‌های نمونه مختلف از جداول انتهایی اکثر کتاب‌های کنترل کیفیت مانند مونتگمری [۷] بدست می‌آید. با فرض نرمال بودن مشاهدات ضریب اطمینان این حدود کنترل ۹۹/۸۶ درصد خواهد بود. برای تعیین حدود کنترل به روش بوت استرپ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- خط مرکز همان  $CL = \bar{\bar{x}}$  حدود کنترل شوهارت برای میانگین است.
- تعداد  $m$  فاصله اطمینان ۹۹/۸۶ درصد به روش بوت استرپ به صورت  $(L_i, U_i)$ ،  $i=1, \dots, m$  محاسبه می‌شود.
- حد بالا و پایین نمودار کنترل بر اساس بوت استرپ به صورت  $UCL = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i$  و  $LCL = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L_i$  تعیین می‌شود.

تعداد تکرار روش بوت استرپ برای محاسبه فواصل اطمینان  $B=1000$  است. برای محاسبه میانگین طول فاصله اطمینان بوت استرپ و حدود کنترل شوهارت و همچنین احتمال پوشش تعداد تکرار شبیه سازی های مونت کارلو را  $m=2000$  مرتبه می گیریم. نتایج شبیه سازی برای سه توزیع نرمال، لگ نرمال و خدو به صورت زیر هستند:

جدول ۱. احتمال پوشش و میانگین طول فاصله اطمینان برای توزیع نرمال

n	$\mu$	$\sigma$	شوهارت	صدکی بوت استرپ	-t بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۰	۱	(۰.۹۶)۱.۵۹۶۷۹۴	(۰.۹۶)۱.۳۵۹۷۴۵	(۰.۹۷)۱.۸۵۲۴۶۱	(۰.۹۵)۱.۴۰۸۵۹۱	(۰.۹۴)۱.۴۲۶۷۷۲
		۵	(۰.۹۷)۷.۹۱۹۱۱۸	(۰.۹۷)۶.۷۲۰۵۰۱	(۱.۰۰)۶.۹۷۸۳۵۵	(۰.۹۴)۶.۹۶۱۲۳۲	(۰.۹۶)۷.۰۰۴۷۵۳
	۵	۱	(۰.۹۵)۱.۶۲۶۷۹۰	(۰.۹۴)۱.۳۸۵۱۸۱	(۰.۹۸)۱.۷۸۵۵۳۳	(۰.۹۵)۱.۴۳۶۵۰۳	(۰.۹۶)۱.۴۵۲۹۹۲
		۵	(۰.۹۶)۷.۹۸۶۷۲۲	(۰.۹۵)۶.۸۴۸۶۹۹	(۱.۰۰)۷.۲۲۱۸۵۶	(۰.۹۶)۷.۰۳۸۲۳	(۰.۹۷)۷.۱۵۳۳۳۲
۱۰	۰	۱	(۰.۹۴)۱.۲۴۱۹۶۵	(۰.۹۵)۱.۱۴۱۲۰۷	(۰.۹۷)۱.۶۶۱۱۱۰	(۰.۹۵)۱.۱۶۰۱۲۴	(۰.۹۶)۱.۱۶۴۲۸۰
		۵	(۰.۹۷)۶.۱۹۵۲۵۲	(۰.۹۶)۶.۶۹۲۹۱۷	(۰.۹۸)۶.۲۹۱۰۵۳	(۰.۹۴)۵.۷۸۹۷۹۷	(۰.۹۶)۵.۸۰۹۲۲۰
	۵	۱	(۰.۹۶)۱.۲۳۹۴۳۵	(۰.۹۴)۱.۱۳۸۶۵۹	(۰.۹۷)۱.۶۶۳۲۰۸	(۰.۹۶)۱.۱۵۸۷۱۸	(۰.۹۵)۱.۱۶۱۹۹۹
		۵	(۰.۹۵)۶.۲۷۳۴۳۱	(۰.۹۶)۵.۷۵۴۴۶۴	(۰.۹۶)۶.۶۰۶۴۱۷	(۰.۹۵)۵.۸۴۸۴۰۴	(۰.۹۶)۵.۸۶۱۱۰۲
۱۵	۰	۱	(۰.۹۴)۱.۰۱۳۱۰۵	(۰.۹۵)۱.۰۰۵۷۵۱۱	(۰.۹۵)۱.۲۴۷۲۷۲۰	(۰.۹۴)۰.۹۶۶۲۰۰	(۰.۹۴)۰.۹۶۷۸۰۲۴
		۵	(۰.۹۶)۵.۰۵۱۴۱۲	(۰.۹۵)۵.۷۸۲۵۸۸	(۰.۹۷)۵.۲۲۰۷۶۳	(۰.۹۶)۴.۸۲۶۸۶۰	(۰.۹۵)۴.۸۳۲۳۳۹
	۵	۱	(۰.۹۴)۱.۰۱۱۰۸۸۷	(۰.۹۶)۱.۰۰۵۷۵۳۳۹	(۰.۹۴)۱.۲۴۶۱۵۱۴	(۰.۹۴)۰.۹۶۵۹۵۰۷	(۰.۹۵)۰.۹۶۷۸۳۳۹۸
		۵	(۰.۹۵)۵.۰۶۶۹۶۵	(۰.۹۶)۵.۰۷۹۸۱۴	(۰.۹۷)۵.۲۵۳۰۴۶	(۰.۹۶)۴.۸۴۳۸۰۳	(۰.۹۶)۴.۸۵۰۲۳۳

جدول ۲. احتمال پوشش و میانگین طول فاصله اطمینان برای توزیع لگ نرمال

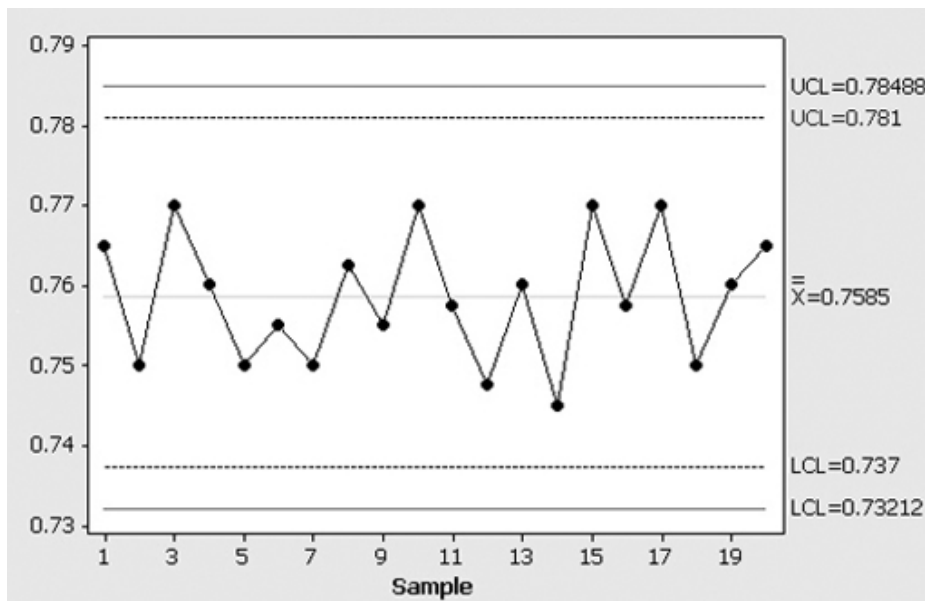
n	$\mu$	$\sigma$	شوهارت	صدکی بوت استرپ	-t بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۰	۵	(۱.۰۰)۲.۹۸۶۶۷۶۹	(۱.۰۰)۲.۷۹۳۲۸۰۲	(۱.۰۰)۳.۰۷۲۹۳۰۰	(۰.۹۷)۰.۸۴۷۷۲۰۳	(۰.۹۸)۰.۸۷۳۱۳۶۷
		۱	(۱.۰۰)۴.۱۶۷۸۲۱	(۱.۰۰)۴.۰۸۷۵۱	(۱.۰۰)۴.۶۸۱۳۳۴	(۰.۹۶)۲.۳۶۶۶۰۶	(۰.۹۷)۲.۳۶۷۶۵۷
	۱	۵	(۱.۰۰)۵.۵۸۰۰۴۳	(۱.۰۰)۵.۰۹۸۰۹۷	(۱.۰۰)۶.۰۲۸۱۶۵	(۰.۹۷)۲.۰۷۳۳۷	(۰.۹۷)۲.۲۶۸۵۲۴
		۱	(۱.۰۰)۹.۸۱۸۳۳۷	(۱.۰۰)۹.۱۸۷۵۳۶	(۱.۰۰)۱۰.۱۶۷۸۱۶	(۰.۹۶)۵.۹۶۶۳۶۰	(۰.۹۶)۵.۲۴۴۴۱
۱۰	۰	۵	(۰.۹۹)۰.۹۳۷۹۶۸	(۰.۹۹)۰.۹۴۸۷۹۱۵	(۰.۹۷)۱.۰۶۸۱۲۹۹	(۰.۹۷)۰.۶۷۹۸۸۴۴	(۰.۹۸)۰.۶۹۲۹۳۴۴
		۱	(۰.۹۸)۲.۹۵۰۳۵۷	(۰.۹۸)۲.۸۸۸۶۶۸	(۰.۹۷)۳.۴۱۶۲۱۱	(۰.۹۶)۱.۶۲۱۴۲۷	(۰.۹۷)۱.۹۰۸۰۸۹
	۱	۵	(۰.۹۸)۲.۰۰۸۰۱۹	(۰.۹۸)۲.۷۶۲۱۲۳	(۰.۹۸)۲.۹۴۲۳۱۲	(۰.۹۵)۱.۱۴۶۲۹۷	(۰.۹۶)۱.۱۷۳۱۹
		۱	(۰.۹۸)۷.۴۸۲۱۰۸	(۰.۹۸)۷.۵۹۴۵۰۴	(۰.۹۷)۷.۸۱۷۱۴۴	(۰.۹۶)۶.۳۴۱۱۴۹	(۰.۹۵)۶.۶۲۳۳۷
۱۵	۰	۵	(۰.۹۵)۰.۶۲۶۰۴۳۴	(۰.۹۶)۰.۶۷۴۳۳۳۱	(۰.۹۶)۰.۶۶۵۵۸۹۰	(۰.۹۵)۰.۵۹۹۶۲۹۴	(۰.۹۶)۰.۶۰۶۵۸۳۱
		۱	(۰.۹۶)۲.۶۶۴۹۸۴	(۰.۹۵)۲.۱۲۸۰۳۸	(۰.۹۶)۲.۲۵۴۱۸۹	(۰.۹۴)۱.۹۹۰۸۳۳	(۰.۹۵)۲.۰۶۲۳۹۰
	۱	۵	(۰.۹۴)۱.۶۶۶۹۵۲	(۰.۹۵)۱.۵۳۶۷۸۲	(۰.۹۷)۱.۶۹۳۳۹۹	(۰.۹۴)۱.۶۰۲۳۰۸	(۰.۹۶)۱.۶۱۴۶۹۶
		۱	(۰.۹۶)۵.۵۵۶۱۵۰	(۰.۹۵)۴.۵۴۱۴۴۳	(۰.۹۸)۵.۵۰۴۷۹۳	(۰.۹۶)۵.۱۳۲۵۴۳	(۰.۹۵)۵.۲۷۱۹۳۵

جدول ۳. احتمال پوشش و میانگین طول فاصله اطمینان برای توزیع خدو

n	v	$\lambda$	شوهارت	صدکی بوت استرپ	-t بوت استرپ	BCa	ABC
۵	۰	۵	(۱.۰۰)۷.۰۴۹۹۸۵	(۱.۰۰)۷.۱۸۴۹۶۰	(۱.۰۰)۷.۵۴۹۶۵۰	(۰.۹۶)۴.۳۰۹۳۸	(۰.۹۷)۴.۴۶۶۱۶۳
		۵	(۱.۰۰)۱۰.۷۲۹۶۴۶	(۱.۰۰)۱۰.۴۳۷۹۲۱	(۱.۰۰)۱۱.۲۹۳۸۶۶	(۰.۹۶)۷.۲۳۳۷۰	(۰.۹۶)۷.۵۴۶۵۷۲
	۱۰	۰	(۱.۰۰)۹.۳۵۰۶۳۹	(۱.۰۰)۹.۱۸۵۷۴۰	(۱.۰۰)۱۰.۰۸۶۷۲۰	(۰.۹۵)۶.۴۸۸۲۸	(۰.۹۵)۶.۲۶۹۰۳
		۵	(۱.۰۰)۱۲.۱۳۰۱۶	(۱.۰۰)۱۲.۵۸۷۸۰۴	(۱.۰۰)۱۲.۷۸۷۸۴۱	(۰.۹۷)۸.۸۸۴۰۹۲	(۰.۹۶)۸.۳۹۶۶۳
۱۰	۰	۵	(۰.۹۸)۷.۹۷۰۴۸	(۰.۹۸)۷.۵۵۰۴۷۷	(۰.۹۶)۷.۸۲۳۳۷۴	(۰.۹۶)۳.۷۲۰۱۲۳	(۰.۹۵)۳.۵۴۵۲۳۳
		۵	(۰.۹۸)۶.۸۷۴۱۴	(۰.۹۷)۶.۰۳۶۱۱۱	(۰.۹۷)۷.۰۳۵۳۷۸	(۰.۹۵)۳.۲۳۸۶۳	(۰.۹۶)۳.۱۸۱۶۱۰
	۱۰	۰	(۰.۹۸)۶.۵۷۷۷۷۷	(۰.۹۸)۶.۰۶۷۹۶۵	(۰.۹۸)۶.۶۲۸۸۹۴	(۰.۹۵)۳.۲۳۸۶۳	(۰.۹۶)۳.۲۰۹۹۶
		۵	(۰.۹۶)۸.۷۹۸۹۱۳	(۰.۹۷)۸.۰۸۴۰۰	(۰.۹۸)۸.۰۵۳۱۱۷	(۰.۹۷)۷.۵۸۷۴۰۰	(۰.۹۶)۷.۱۱۹۷۹۲
۱۵	۰	۵	(۰.۹۶)۳.۱۸۵۰۰۶	(۰.۹۷)۳.۹۵۵۱۵۲	(۰.۹۶)۳.۴۱۹۰۹۲	(۰.۹۶)۳.۰۵۴۲۷۸	(۰.۹۵)۳.۰۰۸۹۹۷
		۵	(۰.۹۷)۵.۶۹۰۳۱۲	(۰.۹۷)۵.۳۱۲۱۴۴	(۰.۹۸)۵.۹۰۴۴۱	(۰.۹۵)۵.۷۶۴۱۰۲	(۰.۹۵)۵.۴۹۹۹۱۲
	۱۰	۰	(۰.۹۶)۴.۴۸۰۰۰۹	(۰.۹۷)۴.۲۱۳۵۵۵	(۰.۹۸)۴.۹۵۴۶۸۷	(۰.۹۷)۴.۷۹۹۹۵۰	(۰.۹۶)۴.۳۱۵۲۵۸
		۵	(۰.۹۵)۶.۲۹۰۶۳۱	(۰.۹۷)۵.۹۱۳۵۴۱	(۰.۹۶)۶.۸۱۱۸۱۷	(۰.۹۶)۶.۰۸۱۷۶۸	(۰.۹۶)۶.۰۴۴۶۱۶

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد هنگامی که به‌طور مثال توزیع جامعه  $X$  دو باشد اگر حجم نمونه و درجه آزادی ثابت بماند و فقط پارامتر غیرمرکزی زیاد شود آنگاه میانگین طول حدود کنترل شوهرات نسبت به میانگین طول فواصل اطمینان بوت استرپ بیشتر تغییر می‌کند. اگر حجم نمونه و پارامتر غیرمرکزی ثابت بماند و درجه آزادی زیاد شود باز هم همین اتفاق رخ می‌دهد. اگر درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی ثابت بماند و حجم نمونه زیاد شود، آنگاه میانگین طول حدود کنترل شوهرات و میانگین طول فواصل اطمینان بوت استرپ به هم نزدیک می‌شوند که با توجه به فاصله حد مرکزی انتظار رخ دادن چنین حالتی را داریم. برای توزیع لگ نرمال هم همین تحلیل برقرار است. هنگامی که توزیع جامعه نرمال باشد، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تفاوتی بین حدود کنترل شوهرات و فواصل اطمینان بوت استرپ وجود ندارد، لذا می‌توان از همان حدود کنترل شوهرات استفاده کرد، در نهایت پیشنهاد می‌شود هنگامی که حجم نمونه کوچک و توزیع جامعه غیرنرمال است، با توجه به نتایج شبیه‌سازی شده از فاصله اطمینان  $ABC$  برای برآورد حدود کنترل نمودار میانگین استفاده شود.

#### مقایسه حدود کنترل شوهرات و بوت استرپ $ABC$



حدود کنترل روش بوت استرپ به‌صورت نقطه چین بر روی نمودار مشخص شده است. ملاحظه می‌شود حدود کنترل روش بوت استرپ نسبت به حدود کنترل شوهرات به هم نزدیک‌ترند.

#### داده واقعی

نوشابه یکی از نوشیدنی‌های مورد استفاده مردم است. کنترل میزان مواد جامد محلول در نوشابه یکی از اهداف واحد کنترل کیفیت کارخانجات نوشابه‌سازی است. برخی مواد اولیه مصرفی در نوشابه‌سازی عبارتند از آب، شیرین کننده‌ها و دی‌اکسید کربن. گاز  $CO_2$  باعث تشدید طعم، افزایش زمان نگهداری، سوزش زبان و کف کردن نوشابه می‌شود. نوشابه باید دمایی کمتر از محیط ( $70^\circ$  درجه فارنهایت) داشته باشد تا خطر ترکیب‌ناپذیری نداشته

باشد. در این بخش برای کنترل کیفیت گاز  $CO_2$  در نوشابه‌های کارخانه زمزم اصفهان نمونه‌برداری از خط تولید انجام گرفته است. نمونه‌برداری شامل  $m=20$  نمونه به حجم  $n=4$  است. با انجام آزمون کولموگروف-اسمیرنوف بر روی مشاهدات فرض نرمال بودن در سطح  $0.05$  رد شد، لذا برای تعیین حدود کنترل از فاصله اطمینان بوت‌استرپ  $ABC$  استفاده می‌کنیم که در آن نتایج به‌صورت  $UCL=0.7810$ ،  $CL=0.7585$  و  $LCL=0.7370$  است. همچنین با فرض نرمال بودن حدود کنترل شوهارت به‌صورت  $UCL=0.7848$ ،  $CL=0.7585$  و  $LCL=0.7321$  خواهد بود.

### منابع

1. S. M. Bajgier, "The use of bootstrapping to construct limits on control charts", Proceedings of the Decision Science Institute (1992) 1611-1613.
2. B. Efron, "Bootstrap methods: Another look at the jackknife", Annals of Statistics, 7 (1979) 1-26.
3. B. Efron, "Nonparametric standard errors and confidence intervals", Canadian Journal of Statistics, 9 (1981) 139-172.
4. B. Efron, "Better bootstrap confidence intervals (With discussion)", Journal of the American Statistical Association, 82 (1987) 171-200.
5. L. A. Franklin, G. S. Wasserman, "Bootstrap lower confidence limits for capability indices", Journal of Quality Technology, 24 (1992) 196-210.
6. R. Y. Liu, J. Tang, "Control charts for dependent and independent measurements based on bootstrap methods", Journal of American Statistical Association, 91 (1996) 1694-1700.
7. D. C. Montgomery, "Introduction to Statistical Quality Control", (1991) John Wiley.
8. PARK, "HYO-IL Median Control Charts Based on Bootstrap Method", Communications in Statistics-Simulation and Computation, 38 (2009) 558-570.
9. T. Seppala, H. Moskowitz, R. Plante, and J. Tang, "Statistical process control via the subgroup bootstrap", Journal of Quality Technology, 27 (1995) 139-153.
10. S. Teyarachakul, S. Chand, and J. Tang, "Estimating the limits for statistical process control charts: A direct method improving upon the bootstrap", European Journal of Operational Research, 178 (2007) 472-481.
11. Z. Wu, Q. Wang, "Bootstrap control charts, Quality Engineering", 9 (1996) 143-150.
12. M. Wood, M. Kaye, N. Capon, "The use of resampling for estimating control chart limits", Journal of Operational Research, 50 (1999) 651-659.