تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۱

مقایسهٔ روش‌های گرادیان مزدوج تعمیم یافته و نشاندن در حل مسائل کنترل بهینهٔ تنظیم کننده با یک کاربری در شیمی

علیرضا فخارزاده جهرمی: دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی
ناهید احمدی بنی‌هاشمی: دانشگاه آزاد واحد گچساران، دانشکده علوم، گروه ریاضی

چکیده

بخش مهمی از مسائل قابل هدایت در مهندسی، از جمله مهندسی شیمی، مسائل کنترلی از نوع تنظیم کننده هستند. همچنین روش‌های گرادیان مزدوج تعمیم یافته و روش نشاندن قابلیت‌های توانمندی در حل این مسائل دارند. این مقاله با معرفی الگوریتم آن‌ها برای حل مسائل کنترل بهینه، به مقایسهٔ این دو شیوهٔ کارا از نظر تحلیلی و عددی خواهد پرداخت. همچنین چگونگی کاربرد آن‌ها در محاسبه مسیر و کنترل بهینه یک مخزن همزده شدهٔ پیوستهٔ راکتور شیمیایی را که تا کنون به این دو شیوه حل نشده‌اند، بیان و بررسی می‌کند. در این راستا با بیان مثال‌های عددی، مقادیر بهینه همراه با مسیر و کنترل بهینه حاصل از این روش‌ها، مقایسه خواهند شد.

مقدمه

به دلایل امنیتی، تکنیکی یا فیزیکی، هر سیستم حقیقی محدود به شرایطی است که در مدل‌سازی به‌عنوان قیدهای سیستم از آن‌ها یاد می‌شود. بیش‌تر این قیدها شامل معادلات دیفرانسیلی از متغیرهای وضعیت و کنترل هستند. از این رو موضوع طراحی سیستم‌های کنترلی، چنان‌که پایداری و برقراری را در این محدودیت‌ها حفظ کنند، همواره مورد توجه بسیار قرار می گیرد. گر چه در گذشته، جواب‌های تقریبی برای این دسته مسائل را با روش‌های اولیه به‌دست می‌آوردند، با پدیداری کامپیوترهای الکترونیکی که دارای سرعت محاسباتی و ظرفیت حافظه‌ای زیاد هستند، روش‌های جدید بهینه‌سازی اختراع و کم‌کم جای‌گزین روش‌های اولیه شدند. حل کردن مسائل ریاضی با زیربناهای مختلف اجتماعی، اقتصادی، مهندسی و غیره، احتیاج به الگوریتم‌های مختلف و مناسب دارد. همواره یکی از موضوع‌های اصلی از نظر ریاضی‌دانان و سایر کارشناسان، حل مسائل با درجهٔ بالایی از دقت در یک زمان محدود عملیاتی، به‌منظور کمینه کردن هزینه‌های محاسباتی است. براین اساس نیازمند مقایسهٔ بین راه حل‌های ممکن یک دسته از مسائل برای تعیین راه حل مناسب به‌منظور نیل به این اهداف هستیم.

واژه‌های کلیدی: مسائل تنظیم کننده، روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته، عملگر کنترلی، اندازه‌های رادن، برنامه ریزی خطی
دریافت ۸۹/٤/۲۹ پذیرش۹۱/٥/۱٦
*نویسنده مسئول *a_fakharzadeh@sutech.ac.ir*

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

هدف ما در این نوشتار بررسی دو راه حل، یکی برمبنای گرادیان مزدوج تعمیم یافته و دیگری مبتنی بر توانایی‌های نظریه اندازه‌ها، موسوم به روش نشاندن، به‌عنوان دو شیوه بهینه‌سازی و حل برای دستهٔ خاصی از مسائل (مسائل تنظیم کننده) است. در این راستا ذکر توانایی‌ها و مقایسهٔ آن‌ها در حل مسائل، اصلی ترین موضوع مقاله است. به‌علاوه برای اولین بار آن‌ها را برای حل مسائلی از مهندسی شیمی به‌کار خواهیم گرفت و نتایج حاصل از این کاربری را با هم مقایسه خواهیم کرد.

مسائل تنظیم کننده

در حالت کلی سیستم کنترل بازخورد یا حلقهٔ بسته سیستمی است که خروجی (یا تابعی از خروجی) را با ورودی مقایسه کرده و سیگنالی را می‌سازد که حاصل خطای تفاضل آن‌هاست. این سیگنال باعث می‌شود که جریان ورودی به سیستم را تغییر داده تا ورودی را به‌سمت مقدار مطلوب هدایت کند. ایدهٔ تغییر دادن ورودی به یک سیستم براساس خروجی برای به‌دست آوردن هدفی مشخص، اساس کنترل بازخوردی است. نمونه‌ای از سیستم حلقه بسته یا سیستم بازخورد، که با وجود اغتشاشات خارجی، خروجی را با یک مقدار مطلوب (دلخواه) دنبال می‌کند، به‌عنوان یک مسئله تنظیم کننده شناخته می‌شود. این سیستم به‌شکل زیر مدل‌بندی می‌شود [۸]:

$$\mathrm{Min}\, J_{(x,u)}(x,u) = \int_0^{\sigma} [\langle \acute{x}, N_1 \acute{x}\rangle_{R^n} + \langle x, N_2 x\rangle_{R^n} + \langle u, Mu\rangle_{R^m}]dt$$

$$S.to: \acute{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t \in [0,\sigma] \quad , \quad x(0) = x_0,$$

که در آن $x(t) \in R^n$ متغیر وضعیت، $u(t) \in R^m$ متغیر کنترل در زمان t، A(t) و B(t) ماتریس‌های وابسته به زمان n×n و n×m است و M، N_1و N_2ماتریس‌های ثابت با بعدهای m×n، n×n و n×n متقارن و مثبت معین هستند. این دسته از مسائل، مانند بیش‌تر مسائل کنترلی با روش‌های مختلفی قابل حل هستند. برخی از این روش‌ها مبتنی بر حل عددی سیستم معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله، برخی بر پایه نوع روش بهینه‌سازی به‌کار رفته و برخی بر مبنای آنالیز حساسیت و نظایر آن هستند [۲۱]. اهمیت این دسته از مسائل چنان است که روش‌های متنوع جدیدی برای رده‌های مختلف آن‌ها ارائه شده است؛ از میان آن‌ها می‌توان به‌عنوان نمونه به روش‌های مد لغزشی [۱]، سری‌های توانی [۱۲] و مسئلهٔ معکوس [۱۴] اشاره کرد.

الگوریتم گرادیان مزدوج تعمیم یافته

پایه و اساس این الگوریتم، روش گرادیان مزدوج است [۵]، [۱۹]. اولین بار اونومانی[۱] و آیبیجوگبا[۲] در ۱۹۸۴ [۷] این الگوریتم را برای حل مسائل کنترلی ارائه کردند. گرچه این الگوریتم مشکل نقاط ضعف الگوریتم فضای تابعی [۷] را رفع کرد، در عین حال چارچوب الگوریتم روش گرادیان مزدوج را حفظ می‌کند.

۱. Onumanyi ۲. Ibiejugba

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

در ۱۹۸۸، آبییجوگبا و روبیو[۱] الگوریتم گرادیان مزدوج تعمیم یافته را برای حل مسائل تنظیم کننده به‌کار بردند [۸]. آبییجوگبا در۱۹۹۰، با ادامهٔ همان کار برای حل مسائل تنظیم کننده در [۹] به ارائهٔ مسائل و حل عددی آن‌ها با استفاده از آن الگوریتم پرداخت. برای آشنایی با این روش، حل نمونه‌ای ساده از مسئلهٔ یک بعدی را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\text{Min}\int_0^{\sigma}\{ax^2(t)+bx^2(t)\}\,dt.\\ &\text{S. to: } \dot{x}(t)=c(t)x(t)+d(t)u(t), \qquad (3,1)\\ &0\le t\le\sigma, x(0)=x_0, \end{aligned}$$

که در آن a و b مقادیری ثابت و مثبت و c(t) و d(t) توابعی هموار از t هستند. مطابق [۲] و [۵]، مسئله (۳.۱) را می‌توان به مسئلهٔ نامقید زیر تبدیل کرد:

$$\text{Min } J_2(x,u,\mu)=\int_0^{\sigma}\{ax^2(t)+bu^2(t)+\mu[\dot{x}(t)-c(t)x(t)-d(t)u(t)]^2\}dt,$$

به‌علاوه می‌توان J_2 را به این روش دوباره نویسی کرد:

$$J_2(x,u,\mu)=\int_0^{\sigma}\omega^T(t)B\omega(t)dt,$$

که در آن برای هر $t\in[0,\sigma]$، $\omega^T(t)=[x(t),\dot{x}(t),u(t)]$ و

$$B=B(t)=\begin{bmatrix} a+\mu c^2(t) & -\mu c(t) & \mu c(t)d(t)\\ -\mu c(t) & \mu & -\mu d(t)\\ \mu c(t)d(t) & -\mu d(t) & b+\mu d^2(t)\end{bmatrix}.$$

بنا بر این B یک ماتریس متقارن است. ما عناصر آن را به‌وسیلهٔ b_{ij} نمایش می‌دهیم. تابعی J_2 دارای سه خاصیت کرانداری، دوخطی بودن و خودالحاقی است [۸]. بنا بر این طبق قضیه (۵.۲) از [۱۵] تحت این سه خاصیت یک عمل‌گر کنترلی یکتای F که در شرط ذیل صدق کند وجود دارد:

$$\begin{aligned}\langle Z,FZ\rangle_K&=\int_0^{\sigma}\{ax^2(t)+bu^2(t)+\mu[\dot{x}(t)-c(t)x(t)-d(t)u(t)]^2\}\,dt\\ &=J_2(x,u,\mu), \quad (3.2)\end{aligned}$$

و داریم:

$$FZ=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{11}x+F_{12}u\\ F_{21}x+F_{22}u\end{bmatrix}.$$

در اینجا تنها کافی است $F_{11}x$، $F_{12}x$، $F_{21}x$ و $F_{22}x$ را به‌دست آوریم. بعد از انجام تبدیلات و محاسبات با استفاده از مراجع [۸] و [۱۱] خواهیم داشت:

۱. Rubio

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

$$(F_{11}x)(t) = -\big(\mu\acute{x}(0) - \mu c(0)x(0)\big)\sinh t + \int_0^t \big(\mu\acute{x}(s) - \mu c(s)x(s)\big)\cosh(t-s)\,ds - \int_0^t [ax(s) + \mu c^2(s)x(s) - \mu c(s)\acute{x}(s)]\sinh(t-s)\,ds + [ax(0) + \mu c^2(0)x(0) - \mu c(0)\acute{x}(0)]\cosh t + \frac{\sinh t}{\sinh\sigma}\Big\{ax(\sigma) + \mu c^2(\sigma)x(\sigma) - \mu c(\sigma)\acute{x}(\sigma) + \sinh\sigma\big(\mu\acute{x}(0) - \mu c(0)x(0)\big) - \int_0^\sigma \cosh(\sigma-s)\,\big(\mu\acute{x}(s) - \mu c(s)x(s)\big)ds + \int_0^\sigma \big(ax(s) + \mu c^2(s)x(s) - \mu c(s)\acute{x}(s)\big)\sinh(\sigma-s)\,ds - \cosh\sigma[ax(0) + \mu c^2(0)x(0) - \mu x(0)c(0)]\Big\};\quad 0 \le t \le \sigma \quad (3.3)$$

$$F_{21}x = \mu c(t)d(t)x(t) - \mu d(t)\acute{x}(t); \quad (3.4)$$

$$(F_{12}u) = -\sinh t\,.\,\mu d(0)u(0) + \int_0^t \mu d(s)u(s)\cosh(t-s)\,ds - \int_0^t \sinh(t-s)\,\mu c(s)d(s)u(s)ds + \cosh t\mu c(0)d(0)u(0) + \frac{\sinh t}{\sinh\sigma}(\mu c(\sigma)d(\sigma)u(\sigma)(1-\cosh(\sigma)) + \sinh\sigma.\,\mu d(0)u(0) - \int_0^\sigma \mu d(s)u(s)\cosh(\sigma-s)\,ds + \int_0^\sigma \sinh(\sigma-s)\,\mu c(s)d(s)u(s)ds); \quad (3.5)$$

$$\big(F_{22}u(t)\big) = bu_2(t) + ud^2(t)u_2(t) \quad (3.6)$$

اکنون برای حل مسئله، الگوریتم گرادیان مزدوج تعمیم یافته چنین معرفی می‌شود:

گام اول: (x_0,u_0) اولیه را به‌طور دلخواه انتخاب کنید.

گام دوم: قرار دهید:

$$P_0 = -g_0 = \nabla J(x_0,u_0,\mu) = \begin{bmatrix}\nabla J_x(x_0,u_0,\mu)\\ \nabla J_u(x_0,u_0,\mu)\end{bmatrix}, g_i = \begin{bmatrix}g_{x,i}\\ g_{u,i}\end{bmatrix} P_i = \begin{bmatrix}P_{x,i}\\ P_{u,i}\end{bmatrix}.$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i P_{x,i}, \quad u_{i+1} = u_i + \alpha_i P_{u,i},$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

$$\alpha_i = \frac{\langle g_i, g_i \rangle}{\langle P_i, FP_i \rangle}, \quad g_{x,i+1} = g_{x,i} + \alpha_i(F_{11}, F_{21})P_{x,i}, \quad g_{u,i+1} = g_{u,i} + \alpha_i(F_{12}, F_{22})P_{u,i},$$

$$\beta_i = \frac{\langle g_{i+1}, g_{i+1} \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle}, \quad P_{u,i+1} = -g_{u,i+1} + \beta_i P_{u,i}, \quad P_{x,i+1} = -g_{x,i+1} + \beta_i P_{x,i}$$

(یادآور می‌شویم که F عمل‌گر کنترلی است).

گام سوم: اگر g_i برای بعضی از iها صفر شد، الگوریتم متوقف می‌شود. در غیر این صورت، با جای‌گذاری $i=i+1$ و به گام ۲ می‌رویم.

لازم به ذکر است که در روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته، احتیاجی به تعیین مستقیم عمل‌گر F نیست، زیرا صرفاً به FP_i نیازمندیم که در آن P_i در اصل همان جهت‌های مزدوج در روش گرادیان مزدوج است.

روش نشاندن در حالت کلی

این بخش به معرفی اجمالی روش نشاندن برای حل مسائل کنترل بهینه، به‌صورتی ساده اختصاص یافته است. بر این مبنا به بیان چگونگی عمل‌کرد و اجرای این روش در حل دسته مسائل کلاسیک نظریه کنترل می‌پردازیم که بر مبنای یک سیستم از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی تعریف شده‌اند. بیان این روش بر مبنای شیوهٔ طرح شده در [۱۷] است. برای اطلاع از تاریخچه و کاربردهای مختلف این روش می‌توان به [۲۲] ، [۳] و [۴] رجوع کرد. به‌طور معمول، یک مسئلهٔ کلاسیک کنترل بهینه بدین‌صورت است:

$$\text{Min} \int_J f_0(t, x(t), u(t))dt \quad (4.7)$$

$$\text{S. to: } x = g\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in J,$$

که در آن: $J=[t_a,t_b]$ بازهٔ زمانی سیستم است و f_0 تابعی پیوسته است، برای مجموعهٔ بسته و کراندار $U \in R^n$ تابع تقریباً همه جا اندازه‌پذیر لبگ $u(t):J\to U$ تابع کنترل سیستم است، برای مجموعه بسته و کراندار $A \in R^n$، تابع مطلقاً پیوسته $x(t): J\to A$ تابع مسیر نامیده می‌شود.

برای مسئلهٔ کلاسیک (۴.۷) زوج مسیر- کنترل $p=(x(t),u(t))$ را قابل قبول می‌نامیم هرگاه این شرایط برقرار گردد:

الف) تابع مسیر $x(i)$ در A به‌طور مطلق پیوسته باشد.

ب) تابع کنترل $u(t)$ مقادیر خود را در مجموعه کرانداری چون U گرفته و روی J اندازه لبگ‌پذیر باشد.

ج) شرایط مرزی $x(t_a)=x_a$ و $x(t_b)=x_b$ برقرار باشند.

د) این زوج از توابع در معادلهٔ دیفرانسیل (۴.۷) صدق کند.

مجموعه چنین زوج‌های قابل قبولی با W نمایش داده شود.

فرض می‌کنیم $B \in R^{n+1}$ یک گوی باز شامل مجموعه $J\times A$ باشد، آنگاه $C`(B)$ را مجموعه فضای تمام توابع حقیق به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی B که خود و تمام مشتقات اولشان روی B کرانداراند، تعریف می‌کنیم. هم‌چنین $D(J)$ را فضای توابع حقیقی با تکیه‌گاه فشرده که به‌طور نامتناهی در $J=(t_a,t_b)$ مشتق‌پذیرند در نظر

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

می‌گیریم. به‌علاوه با تعریف $C_1(\Omega)$, $\Omega=J\times A\times U$ را زیرمجموعه‌ای از توابع $C(\Omega)$ در نظر می‌گیریم که فقط به متغیر t وابسته باشند. بنا به خصوصیات زوج‌های قابل قبول، در [۱۷] نشان داده شده است که مسئلهٔ (۴.۷) با مسئلهٔ زیر معادل است:

$$\text{Min:} \qquad I(p) = f_J f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt$$

$$\text{S. to:} \quad f_J \varphi^g(t, x(t), u(t))dt = \varphi(t_b, x_b) - \varphi(t_a, x_a) \equiv \Delta\varphi, \forall\varphi \in \acute{C}(B);$$

$$f_J \psi_j^g\big(t, x(t), u(t)\big)dt = 0, \quad j = 1,2, \dots, n, \quad \forall\psi \in D(J^0);$$

$$f_J f\big(t, x(t), u(t)\big)dt = a_f; \qquad \forall f \in C_1(\Omega)$$

که در آن $\psi_j^g(t,x,u) = x_j\psi(t), \varphi^g(t,x,u) = \varphi(t,x)g(t,x,u) + \varphi(t,x)$ و a_f انتگرال لبگ $f(t,x,u)$ (مستقل از x و u) روی J است.

برای هر $p = (x,u) \in W$ تابعی مثبت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A_P: f \in C(\Omega) \to \int_J f\big(t, x(t), u(t)\big)dt. \quad (4.8)$$

در [۱۳] ثابت شده است که انتقال $p\to A_P$ از زوج‌های قابل قبول در W به نگاشت‌های خطی در A_P تعریف شده در (۴.۸) یک به یک است. لذا با استفاده از قضیهٔ نمایش ریس ([۱۸]) برای تابعی مثبت A_Pروی $C(\Omega)$ یک اندازهٔ برل منظم مثبت یکتا مانند μ_P روی Ω وجود دارد به‌صورتی که

$$A_P(f) = \int_\Omega f(t,x,u)d\mu = \mu_p(f), \qquad \forall f \in C(\Omega)$$

یکتایی اندازهٔ حاصل از قضیه نمایش ریس موجب می‌شود که به‌صورت یک به یک زوج‌های قابل قبول به فضایی از اندازه‌ها برده شود. با گسترش فضا و در نظر گرفتن تمام اندازه‌های رادن مثبتی که در شروط صدق می‌کنند به‌عنوان فضای جواب مسئله ثابت می‌شود که مسئله دارای جواب منحصر به‌فرد است.

بنا بر این مسئلهٔ (۴.۷) با استفاده از قضیهٔ نمایش ریس بدین‌صورت تبدیل می‌شود:

$$\text{Min:} \qquad \mu(f_0), \qquad \mu_P \in M^+(\Omega)$$

$$\text{S. to:} \qquad \mu(\varphi^g) = \Delta\varphi, \qquad \forall\varphi \in \acute{C}(B);$$

$$\mu\left(\psi_j^g\right) = 0, \quad j = 1,2, \dots, n, \quad \forall\psi \in D(J^0), \quad (4.9)$$

$$\mu(f) = a_f, \qquad \forall f \in C_1(\Omega).$$

مسئلهٔ (۴.۹) بر حسب مجهول خود μ خطی اما از نوع نامتناهی است. هدف بعدی تعیین جواب مسئله با یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی است. برای این منظور ابتدا سعی می‌کنیم که تعداد قیود مسئله را محدود کنیم. این کار با انتخاب زیر مجموعه‌های چگال شمارا از هر یک از فضاهای قیود صورت می‌گیرد، چنان‌که ترکیبات خطی عناصر این زیرمجموعه‌ها، تحت توپولوژی همگرای یکنواخت در فضاهای مربوطه چگال باشند. برای اولین مجموعه‌ای از معادلات (۴.۹) چندجمله‌ای‌هایی از t و x را در نظر می‌گیریم که در $C`(B)$ چگال باشند. در مورد دستهٔ دوم از قیود، توابع چگال ψ_j در $D(J)$ را مانند ربیو در [۱۷] به‌صورت

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

$$\psi_j = \sin(2\pi jt - \Delta t_a), \qquad j = 1,2, \ldots,$$
$$\psi_j = 1 - \cos(2\pi jt - \Delta t_a), \qquad j = 1,2, \ldots,$$

انتخاب می‌کنیم. برای دستهٔ سوم از قیود توابع را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_s = \begin{cases} 1 & t \in J_s \\ 0 & t \in J_s \end{cases}$$

چنان‌که برای عدد M_3 داریم: $J_s=\{t_a+(s-1)d,t_a+sd\}$ جایی‌که $d=t_a-t_bM_3$ و $s=1,2,3,\ldots,M_3$. با انتخاب تعداد M_1، M_2 و M_3 توابع از محدودیت‌های نوع اول و دوم و سوم، بنا به خواص مجموعه‌های چگال، ثابت شده است که در مسئلهٔ کمینه‌سازی $\mu(f_0)$ با شرایط

$$\mu\left(\varphi_j^g\right) = \Delta\varphi_j \qquad j = 1,2,3, \ldots, M_1;$$
$$\mu\left(\psi_h^g\right) = 0 \qquad h = 1,2,3, \ldots, M_2; \qquad (4.10)$$
$$\mu(f_s) = a_s \qquad s = 1,2,3, \ldots, M_3;$$

اگر M_1، M_2 و M_3 به بینهایت میل کنند، آن‌گاه $\inf_{Q(M_1,M_2,M_3)}\mu(f_0) \to \inf_Q\mu(f_0)$.

گام بعدی، تعیین اندازهٔ بهینهٔ مسئله (۴.۱۰) به‌صورت ترکیب خطی نامنفی از $M_1+M_2+M_3$ اندازهٔ اتمی واحد است. اساس این تقریب بر مبنای نتایج حاصل از کار رزنبلوم است که ربیو آن را در [۱۷] آورده است. بر این مبنا، اندازهٔ بهینه μ^* برای (۴.۱۰) به‌شکل $\mu^* = \sum_{k=1}^{M_1+M_2+M_3} \alpha_k^*\delta(z_k^*)$ است که در آن $z_k^* \in \Omega$ و $\alpha_k^* \geq 0$ برای هر $k=1,2,3,\ldots,M_1,M_2,M_3$. از جای‌گذاری اندازهٔ بهینهٔ فوق در مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی (۴.۱۰) با یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی با ضرایب مجهول $\{\alpha_i^*\}_{i=1}^{M_1+M_2+M_3}$ و تکیه‌گاه مجهول $\{z_k^*\}_{k=1}^{M_1+M_2+M_3}$ مواجه خواهیم شد. اگر به‌نحوی بتوان نقاط z_k^* را حتی به‌صورتی تقریبی، معلوم کرد، مجهول‌های مسئله تنها شامل ضرایب α_i^* خواهند شد و لذا (۴.۹) به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی مبدل خواهد شد.

چنین کاری با انتخاب یک مجموعهٔ چگال و شمارا در Ω و سپس انتخاب تعداد متناهی از نقاط آن به‌عنوان گره انجام می‌پذیرد. لذا جواب (۴.۱۰) با توجه به مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر که در آن $\{z_j\}_{j=1}^N$ متعلق به زیرمجموعه ای چگال از Ω است، تقریب می‌گردد:

$$\text{Min:} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j f_0(z_j)$$
$$\text{S. to:} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_l^g(z_j) = \Delta\varphi_l, \quad l = 1,2, \ldots, M_1;$$
$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \psi_h^g(z_j) = 0, \quad h = 1,2, \ldots, M_2; \quad (4.11)$$
$$\sum_{j=1}^N \alpha_j f_s(z_j) = a_s, \qquad s = 1,2, \ldots, M_3$$
$$a_j \geq 0; \qquad j = 1,2, \ldots, N.$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

در عمل ابتدا بازه‌های مربوط به زمان، مسیر و کنترل را به‌ترتیب به N_1، N_2 و N_3 قسمت تقسیم کرده و قرار می‌دهیم $N=N_1N_2N_3$. سپس از هر یک از N قسمت فوق یک نقطه $Z_k=(t_i,x_j,u_h)$ برای $k=1,2,\ldots,N$: $i=1,2,\ldots,N_1$، $j=1,2,\ldots,N_2$ و $h=1,2,\ldots,N_3$ را انتخاب می‌کنیم، چنان‌که مؤلفه‌های اعداد گویا باشند. مجموعهٔ W را با عناصر Z_k تشکیل می‌دهیم. اگر N به‌قدر کافی بزرگ انتخاب شود، مجموعه جدید در $\Omega=J\times A\times V$ چگال خواهد شد. (تعداد تقسیمات N در واقع به نوعی دقت جواب را نشان می‌دهد). با استفاده از جواب بهینهٔ $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*\}$ حاصل ازحل مسئلهٔ (۴.۱۱) قادرخواهیم بود کنترل تقریباً بهینه را با استفاده ازروش ارائه شده در [۱۷] به‌صورت تابعی قطعه‌ای ثابت به‌دست آوریم. آنگاه مسیر (تقریباً) بهینه از حل معادلهٔ دیفرانسیل (۴.۷) به‌دست می‌آید.

مقایسهٔ دو الگوریتم از نظر تحلیلی وعددی

در این قسمت به مقایسهٔ دوروش شرح داده شده درحالت کلی می‌پردازیم. بدین منظور مواردی چون راه حل از نظرتئوری وعددی، همگرایی، پیچیدگی، زمان اجرا، ارائه و پیاده‌سازی الگوریتم‌ها بااستفاده از نرم‌افزار maple10 را برای هر دو روش بررسی می‌کنیم. در مقایسهٔ عملی، این دو روش در حل مسائل تنظیم کننده به‌کار گرفته شده است. این دسته مسائل، طیف وسیعی از مسائل کاربردی کنترلی هستند که توسط دو روش قابل حل هستند. در پایان دو مثال را با این دو روش حل ومقایسه می‌کنیم. یکی از مثال‌ها، کلاسیک و دیگری مثالی کاربردی است که در آن برای اولین بار حل یک مسئلهٔ از مهندسی شیمی در خصوص مخزن بهم‌زده شده پیوسته در یک راکتور شیمیایی از روش‌های ذکر شده بررسی و ارزیابی می‌شود. هر دو روش مذکور از زمینه و اطلاعات ریاضی محکم، قوی وپیچیده بر خوردارند با این تفاوت که در روش نشاندن نظریه اندازه‌ها که بخش عمده آنالیز است، مبنا قرار گرفته است. همچنین بااستفاده از قضیه‌های اساسی در این زمینه، مسئلهٔ کنترلی به مسئله‌ای برنامه‌ریزی خطی تبدیل شده است که در نوع خود تقریب فوق‌العاده‌ای است.

چنان‌که گفته شد، در این روش با تقسیم بازه‌های زمان، کنترل ومسیر به زیر بازه‌ها، نقاط $z_i=(t_i,x_i,u_i)$ به‌دست می‌آیند چنان‌که با افزایش این نقاط تقریب بهتری از جواب به‌دست خواهد آمد. از آن‌جا که توابعی که در این روش به‌طور معمول به‌کار می‌روند، قابل جای‌گزینی با توابع دیگر هستند که خصوصیات و شرایط مورد نظر را داشته باشند، در این روش امکان بررسی انواع توابع و جواب‌های مرتبط با آن‌ها وجود دارد.

از مزایای بسیار مهم این روش، اثبات وجود جواب به‌صورتی خودکار است (قضیه‌ای از [۱۷]). اما روش نشاندن از پیچیدگی ذاتی نسبتاً زیادی برخوردار است. این پیچیدگی در قسمت اجرای نرم‌افزاری الگوریتم و در بخش مرتبط با محاسبهٔ تحلیلی ریاضی توابع مورد نیاز در الگوریتم است. در اصل آن‌ها نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب برای مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی مورد نظر بر اساس گسسته‌سازی فضای مسئله است. از این رو پیچیدگی آن در مقایسه با قدرت حل مسائل حتی ذاتاً غیرخطی قوی، آن‌هم با شیوه‌ای خطی، نمی‌تواند از اهمیت چندانی برخوردار باشد.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

بنا براین بعد از تبدیل مسئلهٔ کنترل به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی، می‌توان با هر نرم‌افزاری که توانایی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی را داشته باشد، مسئله را اجرا و حل کرد. از این رو توانایی این روش برای تبدیل یک مسئلهٔ کنترلی به مسئله‌ای قابل حل به شکل ساده برنامه‌ریزی خطی بسیار قابل توجه است.

روش نشاندن قادر به حل انواع متفاوتی از مسائل کنترلی است، در حالی که روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته بیش‌تر برای حل مسائل کنترلی با تابع هدف درجه ۲ طراحی شده است. بنا بر این از نظر توانایی حل نسبت به توابع هدف متفاوت بر روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته برتری دارد.

در مقایسه با روش نشاندن، اساس روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته، روش گرادیان مزدوج است که قبلاً در مورد توابع هدف درجه ۲ به‌کار گرفته شده است. لیکن با بسط این روش واستفاده از عمل‌گر کنترلی، قضایای مربوط به فضاهای هاسدروف وانتگرال‌پذیری، روش جریمه، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توانسته‌اند مسئلهٔ کنترلی تنظیم کننده را حل کنند [۹]، [۸]، [۲]، [۱۶].

از نظر راه حل، روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته طولانی‌تر از روش نشاندن است. بعد از انجام مراحل مختلف محاسباتی و تبدیلی روی یک مسئلهٔ تنظیم کننده با روش گرادیان تعمیم یافته، به‌همان الگوریتم مزدوج خواهیم رسید. چنان‌که قبلاً گفته شد، این روش در صورتی که گرادیان تابع جریمه مربوط به مسئلهٔ تنظیم کننده برابر صفر شود، به پایان می‌رسد. پیچیدگی وتخمین همگرایی این روش در [۱۰] بررسی شده است. در حالی‌که تخمین همگرایی در روش نشاندن هنوز یک مسئلهٔ باز است. در روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته ابتدا باید x_0 و u_0 اولیه را تعیین کرد. اما این روش به‌ازای هرx_0 و u_0 اولیه که در شرط $x=g(t,x,u)$ در یک مسئلهٔ تنظیم‌کننده صدق کند، همگرا است. بنا بر این کاربر می‌تواند با تعیین این x_0 و u_0ها به جوابی برای این مسئله برسد. اما تعیین این x_0 و u_0 و متعاقب آن μ چنان‌که مسئله به جواب بهینه خود برسد کاری زمان‌بر است زیرا باید مقادیر متفاوت تابع هدف را به‌ازای μهای متفاوت باهم مقایسه کرد تا کم‌ترین مقدار را به‌دست آورد که به‌وضوح کار ساده‌ای نیست و از مسئله‌ای به مسئلهٔ دیگر این مقدار μی بهینه متفاوت است.

لازم به یادآوری است که برای حل عددی مسائل از طریق روش نشاندن، مشاهده شده است که در برخی موارد بازه‌ها با آزمون و خطا معین می‌گردند. لیکن از آن‌جا که معیار انتخاب آن‌ها حل‌پذیری مسئله برنامه‌ریزی خطی متناهی حاصل است، این نکته اهمیت زیادی ندارد. ضمن آن‌که در صورت نیاز این امکان را می‌دهد که بتوان بازه‌های مناسب را برای کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی مورد نیاز مسئله پیدا کرد.

از نظر اجرا، الگوریتم روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته پیچیده‌تر از روش نشاندن است. گرچه الگوریتم گرادیان تعمیم یافته ساده است، اما پیاده‌سازی آن با نرم‌افزار maple10 کاری زمان‌بر است، زیرا باید مقادیر متفاوت اولیه و μ را امتحان کرد و جواب‌ها را باهم مقایسه کرد و این امر کار اجرا را برای کاربر سخت می‌کند. در حالی که روش نشاندن از نظر اجرای روش، راحت‌تر است. از نظر زمان اجرای الگوریتم، روش

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

نشاندن بر روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته برتری دارد، زیرا اجرای آن سریع‌تر (حتی در بعضی مسائل بسیار سریع‌تر) است. چنان‌که گفته شد، روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته دنباله‌ای از x_iها و u_iها تولید می‌کند که بعد از چند تکرار به x و u بهینه می‌رسد و این تکرارها زمان اجرای الگوریتم را افزایش می‌هد. اما در روش نشاندن α_iهای غیر صفر با اجرای الگوریتم به‌دست می‌آید و توسط آن‌ها u(t) که یک تابع قطعه‌ای ثابت است تخمین زده می‌شود. آنگاه x(t) با حل معادلهٔ دیفرانسیل x=g(t,x,u) محاسبه می‌شود. معمولاً انجام این دو قسمت در هر دو یکسان است لیکن α_iها سریع‌تر از x_iها و u_iها معین می‌شوند. حتی از دیدگاه تعداد تکرارها در روش حل، از آن‌جا که روش نشاندن نیازمند این امر نیست می‌توان گفت که بهتر است. گرچه بهتر کردن جواب در تکرار امکان‌پذیر است، لیکن توجه داشته باشیم که با اضافه کردن تعداد قیود و یا تعداد گره‌ها در روش نشاندن نیز می‌توان به چنین اقدامی دست زد، گرچه ممکن است گاهی با مسئله بزرگی بعد مواجه شویم.

در روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته بعد از تعیین μ، x_0 و u_0 به‌طورکلی، الگوریتم در پایان، u(t) و x(t) را روی بازهٔزمانی به‌کاربر می‌دهد. u(t) درروش نشاندن مثبت و قطعه‌ای است، در حالی که در روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته تابع پیوسته است. لذا ازاین دیدگاه برتری با روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته است.

برای بررسی عملی موضوع‌های ذکر شده، دو مثال زیر را با استفاده از هر دو روش حل کردیم و نتایج را از نظر عددی مقایسه کردیم.

مثال ۱: در مرجع [۱۷] صفحه ۶۰ این مثال از روش نشاندن حل شده است:

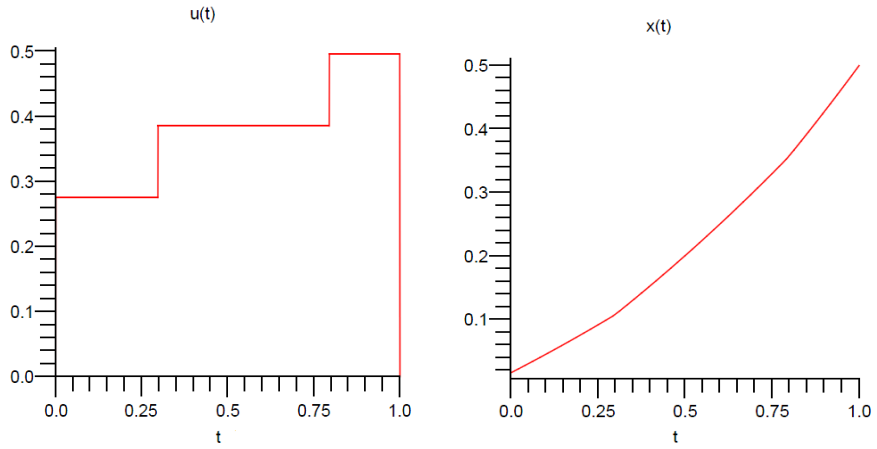
$$Min: \int_J U^2(t)dt$$

$$S.to: x = u + 0/5x$$

$$x(0) = 0, x(1) = 0/5.$$

مطابق آن‌چه در مرجع ذکر شده است، بازه‌های A=[0,1]، U=[0,1] و J=[0,1] را به زیربازه‌های مساوی تقسیم کردیم، طوری‌که در هر تقسیم‌بندی، $\Delta t=\Delta u=\Delta x=0/11$ در نظر گرفته شدند. تعداد ۵ محدودیت از نوع اول، ۸ محدودیت از نوع دوم و ۱۰ محدودیت از نوع سوم اختیار گردیدند، یعنی M_1=۵، M_2=۸ و M_3=۱۰. بنا بر این تعداد قیدها برابر ۲۳ و تعداد نقاط گره نیز N=۱۰۰۰ اختیار شدند. بعد از پیاده‌سازی این روش و اجرای آن با نرم‌افزار maple10، به جواب بهینه I^*=۰/۱۴۵ در زمان T=۰/۵ ثانیه می‌رسیم. هم‌چنین کنترل و مسیر بهینه بدین‌صورت حاصل شدند:

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]



(این مثال در [۱۷] با M_1=۲ و دیگر شرایط مشابه، با نرم‌افزار فرترن حل شد که جواب I^*=۰/۱۴۵۴۹ حاصل گردیده است. این در حالی است که جواب تحلیلی آن I^*=۰/۱۴۵۱ ذکر شده است.)

همین مسئله را با استفاده از روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته حل می‌کنیم. صورت تبدیل شدهٔ این مسئله تحت این روش بدین‌صورت است:

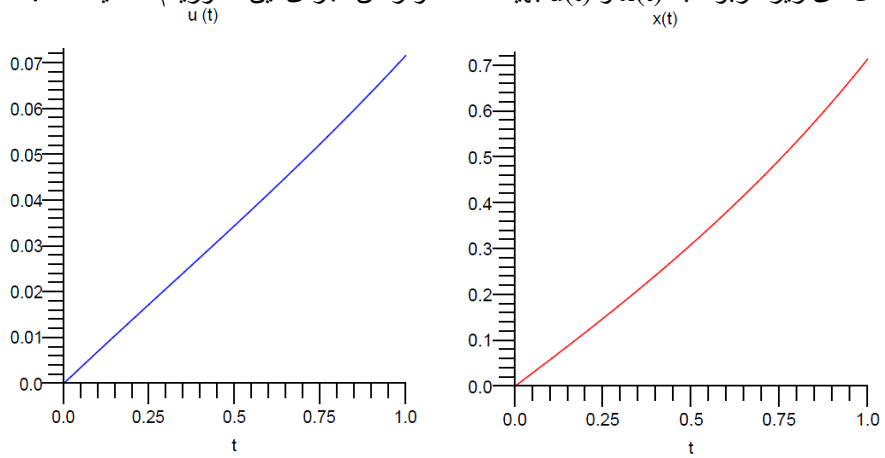
$$\langle (x,u), A(x,u)^T \rangle = \int_0^1 [u^2 + \mu(-u - 0.5x + x]\, dt$$

که در آن A مبین عمل‌گر کنترلی این مثال است. ابتدا تعاریف ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$obj \equiv \int_0^1 u^2 dt\,, cost \equiv \int_0^1 (x - u - 0.5x)^2 dt,\ penaltf \equiv \int_0^t [u^2 + \mu(x - u - 0.5x)^2].$$

در صورتی که جواب‌های x(t) و u(t) بهینه باشند، باید مقدار cost به‌سمت صفر میل کند و obj نیز به مقدار تحلیلی خود در این مسئله که برابر I^*=۰/۱۴۵۱ است، بسیار نزدیک (یا برابر) باشد. بعد از اجرای این الگوریتم به ازای μ=۰/۱۳۵، x_0=۰ و u_0=۰، $x_0(t)$ از حل تحلیلی معادله $x`_0=u_0$ (به ازای u_0=۰ و شرط اولیهٔ $x_0(0)$=۰ به‌دست می‌آید) به جواب بهینه می‌رسیم. به‌ازای مقادیر مفروض این جواب‌ها بعد از ۴ تکرار به‌دست می‌آیند: I=۰/۵۴۱، penalt*f*=۰/۱۸۸۴۱ و cost=۰/۰۱۱.

شکل‌های زیر مربوط به x(t) و u(t) بهینه هستند و زمان اجرای این الگوریتم ۴ ثانیه است.



۲.۵

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

مثال ۲: به‌منظور کاربرد و مقایسهٔ این روش‌ها برای مسائل حقیقی، مسئلهٔ مخزن بهم‌زده شده پیوسته راکتور شیمیایی در [۱۰] را که از مسائل مهم مهندسی شیمی است، بررسی می‌کنیم. معادلات وضعیت برای یک مخزن هم‌زده شده پیوسته راکتور شیمیایی در زیر داده شده است. جریان سرد کننده‌ای که از میان کویل جاسازی شده در راکتور می‌گذرد، عمل شیمیایی مرتبهٔ اول برگشت پذیر و ایزوترمیکی را که در راکتور انجام می‌شود کنترل می‌کند. متغیرهای وضعیت این فرآیند عبارتند از $x_1(t)=T(t)$ (میزان انحراف از درجهٔ حرارت تعادل) و $x_2(t)=c(t)$ (انحراف از غلظت یا concentration تعادل)، $u(t)$ متغیر کنترل نرمالیزه شده است که نشان‌گر اثر جریان خنک کننده در عمل شیمیایی است. در این‌جا این مسئله مهندسی شیمی را با روش نشاندن حل می‌کنیم. معادلات وضعیت مطابق [۲۱] عبارتند از:

$$x_1 = -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5)\exp\left(\frac{25x_1}{x_1 + 2}\right) - x_1 + 0.25)u,$$

$$x_2 = \frac{0}{5} - x_2 - (x_2 + 0.5)\exp\left(\frac{25x_1}{x_1 + 2}\right). \qquad (5.12)$$

شرایط اولیه $x(۰)= (۰/۰۵ ،۰)^T$ و $x(۰/۷۸)=(۰/۰۲ ،-۰/۰۶)$ است و تابعی کمینه شونده بدین‌صورت است:

$$J = \int_0^{0.78} [u^2 + x_1^2 + x_2^2]dt.$$

این تابع هدف، بیان‌گر آن است که هدف مطلوب، نگه‌داشتن درجهٔ حرارت و تمرکز نزدیک مقادیر تعادل آن‌ها، بدون مصرف مقدار زیاد نیرو برای کنترل فرآیند است. برای حل این مسئله با استفاده از روش نشاندن ابتدا بازه‌های J= [۰،۰/۷۸] ،A=[۰ ،۱]×[۱ ،-۱] و u= [۰ ،۱] را انتخاب و هر یک را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس از هر زیربازه نقطه‌ای را به دلخواه برمی‌گزینیم. یک انتخاب می‌تواند بدین‌صورت باشد:

$$t_i = 0.05 + \frac{i-1}{10}, \qquad i = 1,2,\dots,10 \ , \Delta t = 0.1;$$

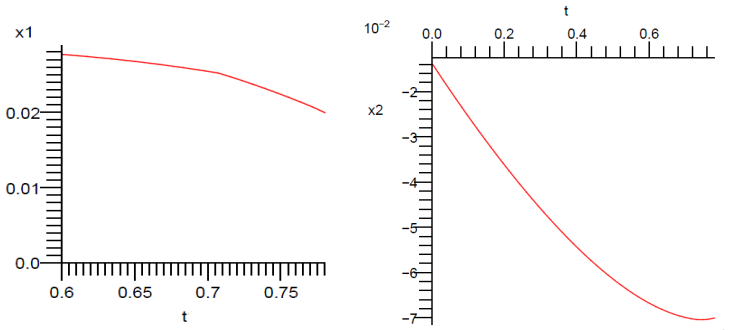
$$x_i = 0/045 + \frac{i-1}{10}, \qquad i = 1,2,\dots,10 \ , \Delta x_1 = 0/1 \, , \Delta x_2 = 0.1;$$

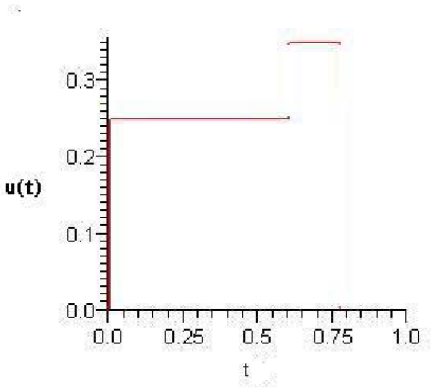
$$u_i = 0.045 + \frac{i-1}{10}, \qquad i = 1,2,\dots,10 \ , \Delta u = 0.1.$$

آن‌گاه با انتخاب M_1=۵، M_2=۸ و M_3=۱۰ و به‌کار بردن روش نشاندن و اجرای آن با نرم‌افزار Maple10، مقدار بهینه تابع هدف برابر ۰/۰۲۶۷۸۶ حاصل شده است. زمان اجرای الگوریتم برابر با ۱۲ ثانیه بود. در مرجع [۲۱] این مثال با سه روش سریع‌ترین سقوط، تغییر نهایت‌ها و تصویر گرادیان حل شده است که در روش سریع‌ترین سقوط بعد از ۷ تکرار مقدار کمینهٔ تابع هدف ۰/۰۲۶۷۸۶ می‌شود که با کمینهٔ مقدار روش‌های دیگر با اختلاف بسیار ناچیز برابر است. مسیر بهینه با استفاده از روش نشاندن اختلاف بسیار کمی با مسیرهای بهینه روش‌های این مرجع دارد و چون روشی بر مبنای ایجاد دنباله‌ای و تکراری نیست، زمان اجرای الگوریتم آن اندک است. ابتدا کنترل بهینه که به‌صورت تابعی قطعه‌ای ثابت است با روش نشاندن، محاسبه شده

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

است. سپس با جای‌گزینی آن در معادلات (۵.۱۲) و حل آن‌ها، مسیرهای تقریبا بهینه به‌دست آمده‌اند. کنترل و مسیرهای تقریباً بهینه بدین‌صورت هستند:





حال این مثال را با روش گرادیان مزدوج تعمیم یافته حل می‌کنیم. چون قیود مسئله غیرخطی است، برای حل از طریق این روش ابتدا باید با استفاده از تقریب تیلور حول (۰، ۰/۰۵)=x(۰) قیود غیرخطی را به خطی تبدیل کنیم. آن‌گاه تنها جملات اول این تقریب را نگه داشته از بقیه جملات صرف‌نظر می‌کنیم، بنا بر این خواهیم داشت:

$$X_1=-1.75x_1+x_2-0.25u, \quad x_2=-0.25x_1-2x_2.$$

حال تابع جریمه و عمل‌گر کنترلی مربوط به این مسئله را می‌نویسیم:

$$\langle Z, HZ\rangle_K = \mathrm{Min}J_{(x,u)}(x,u)$$

$$= \int_0^{0/78} \left[\langle x, N_2x\rangle_{R^2} + \langle u, Mu\rangle_{R^2} + \mu\big(x - Ax(t) - Bu(t)\big)^2\right] dt,$$

که در اینجا $x=(x_1,x_2)$، $u=(u_1,u_2)$، H عمل‌گر کنترلی، $Z=(x,u)$ و B=[-۰/۲۵ ، ۰] هستند، داریم:

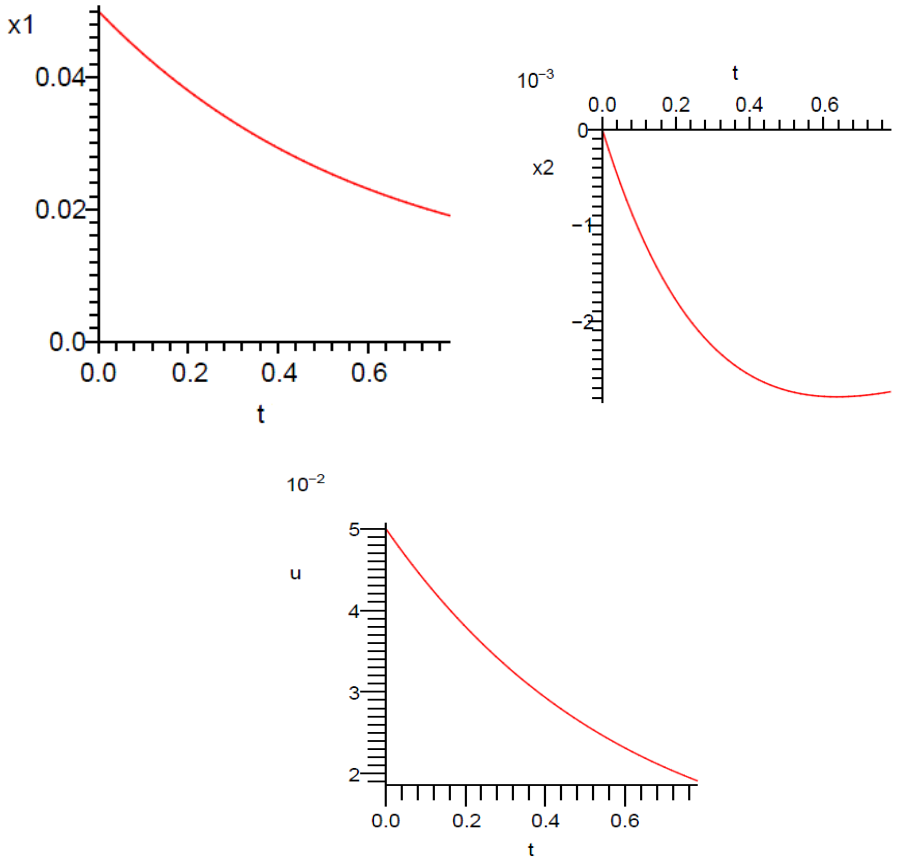
$$HZ = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}x + H_{12}u \\ H_{21}x + H_{22}u \end{bmatrix}$$

که در آن A، M و N_2 ماتریس‌هایی بدین‌صورت هستند:

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1.751 & 1 \\ -0.25 & -2 \end{bmatrix}$$

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

در این‌جا تنها کافی است $H_{11}x$، $H_{21}u$، $H_{12}u$، $H_{22}u$ را به‌دست آوریم. بعد از انجام تبدیلات و محاسبات، بر مبنای [۹]، مقدار کمینهٔ تابع هدف برابر ۰/۰۲۸۲۵ شد و زمان اجرای این الگوریتم برابر ۹۰ ثانیه بود که بعد از پنج تکرار مسیر و کنترل بهینه بدین‌صورت به‌دست آمدند:



مقایسهٔ شهودی مثال‌ها و نتایج عددی و تصویری حاصل از آن‌ها برای دو روش مختلف حل، شاهدی بر نتایج ارائه شده در مورد مقایسهٔ دو الگوریتم، هستند.

منابع

1. M. Basin, "Sliding mode regulator as solution of optimal control problem", Proceeding of 47th IEEE conference on Decision and control, 9-11 Dec (2008) 2184-2189.
2. J. W. Daniel, "The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator", SLAM J. Numerical Analysis, 4 (1967) 10-26.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

3. A. Fakharzadeh J. and A. Alampour, "New Approach for simultaneously determination of the optimal trajectory and control of vibrating string controlled systems", J. International Review of Automatic Control, Vol.2, 5 (2010) 577-583.
4. A. Fakharzadeh J. and L. Talebnezhad, "A Linear Approach for optimizing Energy in Wind Turbines by Embedding Process", International J. of Innovative Computing, Information and Control, Vol.7, 7(B), July (2011) 4465-4476.
5. M. R. Hastenes and E. Stiefel, "Method of conjugate gradients for solving linear systems", J. of Research of the National Bureau of Standards, 49 (1952) 409-439.
6. K. Hoffman, "Linear Algebra", 2ed Edition, Prentice-Hall (1971).
7. M. A. Ibiejugba and P. Onumany, "A control operator and some of its applications", J. of Mathematical Analysis and Applications, 103 (1984) 31-47.
8. M. A. Ibiejugba and J. E. Rubio, "A penalty optimization technique for a class of regulator problems", Part I,II, J. of Optimization Theory and Applications, Vol.58, No 1, July (1988).
9. M. A. Ibiejugba, "A penalty optimization technique for a class of regular problems", Part III, J. of Optimization Theory and Applications, Vol.64, No 3, March (1990).
10. L. Lapidus and R. Luus, "The control of nonlinear systems; Part II: Convergence by combined first and second variation", A. I. Ch. E. Journal, (1967)108-113.
11. L. A. Liusternik and V. J. Sobolev, "Elements of Functional Analysis", Fredrick Unger publishing company, New York (1961).
12. V. I. Lovchakov and E. V. Lovchakov, "Matrix power series method for nonlinear problems of optimal regulator construction", Journal of Automation and Remote control, Vol.72, Issu7 (2011) 1357-1363.
13. D. G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Weslay (1984), Reprinted with Corrections, May (1989).
14. P. Moylan and B. Anderson, "Nonlinear regulator theory and invers optimal control", Automatic Control, IEEE transaction on, Vol.18, Issu5 (2011) 460-465.
15. M. Pedersen, "Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering", Chapman & hall /CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D.C. (1999).
16. G. D. Pillo, L. Grippo and F. Lamperiello, "The multiplier Method for optimal control problem", Conference on Optimization in Engineering and Economics, Naples Italy, Dec. (1972)16-20.

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]

17. J. E. Rubio, "Control and Optimization: the linear treatment for nonlinear problems Manchester university press", Manchester (1986).

18. W. Rudin, "Real and Complex Analysis, McGraw-Hill series in higher mathematics" (3ed edition) (1987).

19. W. Sun and X. Ya-Xiang, "Optimization Theory and Methods: Nonlinear programing", Springer (2006).

۲۰. برگر وا. گراهام، ترجمه وحیدیان و بزرگ نیا، *مقدمه‌ای بر کنترل بهینه*، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۷۲).

۲۱. کرک و دونالد، ترجمه دکتر کمال الدین نیکروش، *مقدمه‌ای بر تئوری کنترل بهینه*، دانشگاه صنعتی امیر کبیر (۱۳۷۹).

۲۲. علیرضا فخارزاده جهرمی، *نگرشی ریاضی در مسائل طراحی شکل بهینه و روش‌های حل آن*، مجله علوم، دانشگاه شهید چمران (۱۳۸۰).

[Downloaded from ndea10.khu.ac.ir on 2026-11-02]