

## روش جدید برای بررسی و تشخیص خودالحاق بودن مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی

\* محمد جهانشاهی، مجتبی سجادمثنش:  
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان، گروه ریاضی

### چکیده

مسائل مقدار مرزی از مباحث مهم در زمینه‌های مهندسی و فیزیک ریاضی هستند. در این بین مسائل خودالحاق به دلیل دارا بودن برخی ویژگی‌های مطلوب برای حلشان، از جمله این‌که مقادیر ویژه مسئله الحاقی همیشه حقیقی هستند و توابع ویژه یک دستگاه متعامد تام می‌سازند، اهمیت ویژه‌ای دارند. در مباحث کلاسیک معمولاً از روش نایمارک [۳] برای تشخیص خودالحاق بودن مسئله اصلی استفاده می‌شود. اما در این روش چون روابط اضافه شده به شرایط مرزی مسئله شامل مقادیر مرزی تابع مجهول با ضرایب اختیاری هستند، اختیاری بودن ضرایب فوق سبب می‌شود که مسئله الحاقی به دست آمده یگانه نباشد. در این مقاله، روشی جدید برای بررسی و ایجاد یک مسئله خودالحاق شامل معادله دیفرانسیل معمولی معرفی می‌گردد. براساس این روش، ابتدا شرایط ضروری وجود جواب مسئله با به‌کارگیری جواب اساسی معادله الحاقی به دست می‌آید، سپس یک دستگاه جبری متشکل از شرایط ضروری به دست آمده و شرایط مرزی مسئله اصلی تشکیل می‌شود. در نهایت با به‌کارگیری اتحاد لاگرانژ و مقادیر مرزی تابع مجهول، شرایط کافی برای خودالحاق بودن مسئله اصلی ارائه می‌گردد. مزیت این روش نسبت به روش کلاسیک نایمارک در این است که به جای روابط اضافه شده به شرایط مرزی مسئله، شرط‌های ضروری به دست آمده روی جواب معادله الحاقی جای‌گزین می‌شود که این روابط به صورت ترکیب خطی از مقادیر مرزی تابع مجهول با ضرایب معین (نه اختیاری) است سبب می‌شود مسئله الحاقی به دست آمده یگانه باشد.

### مقدمه

مدل ریاضی از پدیده‌های فیزیکی و مسائل مهندسی به شکل مسائل مقدار مرزی است، لذا این مسائل توسط ریاضیدانان بسیاری بررسی شده است [۱]، [۲]. در تحقیقات اخیر مسائل خودالحاق به وسیله نایمارک [۳]، بررسی شده است که روشی را برای بررسی و تشخیص این مسائل معرفی کرده است. در این روش، به تعداد شرایط مرزی مسئله، شرایط اضافی با ثابت‌های اختیاری به شرایط مرزی اضافه می‌شود که یک دستگاه جبری تشکیل بدهد. این موضوع باعث می‌شود که مسئله الحاقی برای مسئله اصلی داده شده، به دلیل وجود ثابت‌های اختیاری موجود در شرایط اضافه شده، منحصر به فرد نباشد. در این مقاله، ما روشی را ارائه می‌کنیم که ثابت‌های

واژه‌های کلیدی: مسئله خودالحاق، جواب اساسی (تعمیم یافته)، شرایط ضروری، اتحاد لاگرانژ

دریافت ۹۰/۳/۲۱ پذیرش ۹۰/۱۱/۱۲

نویسنده مسئول jahanshahi@azaruniv.edu

اختیاری در روابط اضافه شده به صورت کاملاً معین در شرایط ضروری به دست آید و در نتیجه، مسئله الحاقی متناظر منحصربه‌فرد باشد. با به‌کارگیری این شرایط به همراه شرایط مرزی مسئله در یک دستگاه جبری، مقادیر مرزی تابع مجهول مشابه [۶] محاسبه می‌شوند. در مرحله نهایی، با به‌کارگیری اتحاد لاگرانژ، شرایط کافی برای خودالحاق بودن مسئله ارائه می‌گردد.

در خصوص روش به‌کار رفته در این مقاله ذکر چند نکته ضروری است:

الف. ایده اصلی استفاده از شرایط ضروری و آشکار کردن این شرایط متعلق به ریاضیدان روسی بیچازده و ریاضیدان آذربایجانی نیهان علی‌اف است. بیچازده [۵] از شرایط فوق به صورت غیر آشکار استفاده کرده، ولی علی‌اف با م. جهانشاهی و م. حسینی طی سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۱۰ در مقالات مختلف [۷]-[۱۱] از شرایط ضروری برای معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) به منظور خوش طرح بودن مسائل مقدار مرزی و امکان تبدیل آن‌ها به دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم استفاده کرده است. در این مقاله ما از ایده‌های ایشان بهره می‌بریم و از شرایط ضروری فوق به منظور تعیین خودالحاق بودن مسئله مقدار مرزی داده شده و ارائه شرایط کافی برای خودالحاق بودن یک مسئله مقدار مرزی استفاده می‌کنیم.

ب. این روش می‌تواند به طور مشابه برای بررسی خودالحاق بودن و یا نبودن مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت و به خصوص برای عملگر بیضوی با ضرایب ثابت

$$P(D)_u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au = f(x)$$

به‌کار رود که در آن  $P(D)$  عملگر خطی دیفرانسیل پاره‌ای (جزئی) با ضرایب ثابت حقیقی بوده و  $u$  جواب کلاسیک است. می‌دانیم که معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت همواره دارای جواب اساسی به مفهوم توزیع است [۴] یعنی

$$P(D)U = \delta(x - \xi)$$

که در آن  $U$  جواب تعمیم یافته به مفهوم توزیع است و  $\delta$  تابع دلتای دیراک است. بنا بر این برای طیف وسیعی از معادلات PDE با ضرایب ثابت می‌توان این روش را به منظور بررسی خودالحاق بودن یا نبودن آن‌ها به‌کار برد.

پ. این روش می‌تواند برای تمام مسائل مقدار مرزی-اولیه خطی که هم شرایط مرزی و هم شرایط اولیه در آن‌ها وجود دارد به‌کار برد. به عنوان مثال برای مسائل شامل PDE از قبیل معادله موج در حالت یک بعدی و دو بعدی و معادله حرارت در حالت یک بعدی و دویبعدی که مسئله اسپکترا آن‌ها (مسئله مقدار ویژه مربوط) بعد از به‌کارگیری روش فوریه (جداسازی متغیرها) و روش تبدیلات انتگرالی و روش فوریه-بیرکف مانند این موارد به‌کار رود:

برای مسائل مقدار مرزی-اولیه مانند معادله هذلولوی موج

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u(a, t) = p(t), \quad u(b, t) = q(t)$$

و یا برای معادله سهموی حرارت

$$u_t = k u_{xx}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(a, t) = p(t), \quad u(b, t) = q(t)$$

و برای حالت‌های دوبعدی و n بعدی این معادله می‌توان به‌کار برد که بعد از به‌کارگیری روش فوریه و روش تبدیلات انتگرالی، مسئله اسپکترال (کمکی) آن‌ها یک مسئله مقدار ویژه خواهد بود که می‌توان برای خودالحاق بودن یا نبودن آن‌ها بحث کرد.

### بیان ریاضی مسئله

مسئله مقدار مرزی با شرایط مرزی غیرموضعی را در نظر می‌گیریم:

$$\ell y \equiv y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = \varphi(x); \quad x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$\ell_i y \equiv \alpha_{i1} y'(0) + \alpha_{i2} y(0) + \beta_{i1} y'(1) + \beta_{i2} y(1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

که در آن  $\varphi$  تابع حقیقی مقدار پیوسته و معلومی است و  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) ثابت‌های حقیقی هستند.

### مسئله الحاقی مربوط به مسئله اصلی

الحاقی معادل  $G$  (1) را به این شکل در نظر می‌گیریم:

$$\ell^* z \equiv z''(x) - a_1 z'(x) + a_2 z(x), \quad (3)$$

به‌طوری‌که

$$(\ell y, z) = B(y, z) + (y, \ell^* z),$$

که در آن

$$B(y, z) = [y'(x)z(x) - y(x)z'(x) + a_1 z(x)y(x)]|_0^1. \quad (4)$$

### ۱. روش نایمارک

مطابق با روش نایمارک برای به‌دست آوردن مسئله الحاقی دو شرط مرزی زیر به شرایط مرزی اضافه می‌شود:

$$\ell_i y \equiv \alpha_{i1} y'(0) + \alpha_{i2} y(0) + \beta_{i1} y'(1) + \beta_{i2} y(1), \quad i = 3, 4 \quad (5)$$

که در آن ثابت‌های اختیاری هستند.

دو شرط مرزی (۲) به همراه شرایط اضافی (۵) تشکیل یک دستگاه جبری داده که ثابت‌های

$\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i = 3, 4, j = 1, 2)$  طوری انتخاب می‌شوند که دترمینان ماتریس ضرایب آن بدین صورت

مخالف صفر باشد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_{31} & \beta_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \beta_{41} & \beta_{42} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (۶)$$

هرگاه  $A_{ij} (i, j = 1, \dots, 4)$  را به عنوان کهاد (همسازه) درایه  $i$ ام در  $\Delta$  در نظر بگیریم در این صورت برای

مجهولات دستگاه جبری فوق این روابط را به دست می‌آوریم:

$$y'(0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i1} \quad , \quad y(0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i2}$$

$$y'(1) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i3} \quad , \quad y(1) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i4}$$

و برای  $B(y, z)$  داریم

$$B(y, z) = \frac{z(1)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i3} - \frac{z'(1)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i4} + \frac{a_1 z(1)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i4} -$$

$$\frac{z(0)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i1} + \frac{z'(0)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i2} - \frac{a_1 z(0)}{\Delta} \sum_{i=1}^4 \ell_i y A_{i2} .$$

بنا بر این شرایط مرزی مسئله الحاقی بدین صورت هستند:

$$A_{i3}z(1) - A_{i4}z'(1) + a_1 A_{i4}z(1) - A_{i1}z(0) + A_{i2}z'(0) - a_1 A_{i2}z(0) = 0, \quad i = 3, 4.$$

با توجه به این که ضرایب  $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i = 3, 4, j = 1, 2)$  ثابت‌های اختیاری هستند، مسئله الحاقی حاصل

منحصر بفرده نیست.

## ۲. روش استفاده از شرایط ضروری

در این بخش، مسئله الحاقی متناظر با مسئله اصلی را تشکیل می‌دهیم که منحصر بفرده است، زیرا شرایط اضافی

به‌طور منحصر بفرده با به‌کارگیری شرایط ضروری مشخص می‌شوند.

برای این منظور، ابتدا جواب اساسی معادله را به این شکل در نظر می‌گیریم:

$$Z(x - \xi) = \frac{e^{(x-\xi)}}{r_1 - r_2} [e^{r_1(x-\xi)} - e^{r_2(x-\xi)}], \quad (۸)$$

که در آن  $e$  تابع هویساید مقارن و  $r_1, r_2$  ریشه‌های مجزای معادله شاخص (۳) هستند. به عبارت دیگر

$$Z''(x - \xi) - a_1 Z'(x - \xi) + a_2 Z(x - \xi) = \delta(x - \xi), \quad (۹)$$

که در آن  $\delta$  تابع دلتای دیراک است [۴].

اکنون شرایط ضروری را برای معادله دیفرانسیل (۱) به دست می آوریم. بدین منظور، جواب اساسی (۸) به طرفین معادله (۱) ضرب شده و سپس روی  $[0,1]$  انتگرال گیری می کنیم. (چنان که در [۶] و [۷] مشاهده می شود.)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)Z(x-\xi)dx &= \int_0^1 [y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x)]Z(x-\xi)dx \\ &= [y'(x)Z(x-\xi) - y(x)Z'(x-\xi) + a_1y(x)Z(x-\xi)]_0^1 + \\ &\quad \int_0^1 y(x)[Z''(x-\xi) - a_1Z'(x-\xi) + a_2Z(x-\xi)]dx. \end{aligned}$$

طبق رابطه (۹) و خاصیت تابع  $\delta$  داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(x)[Z''(x-\xi) - a_1Z'(x-\xi) + a_2Z(x-\xi)]dx &= \int_0^1 y(x)\delta(x-\xi)dx \\ &= \begin{cases} y(\xi) & \xi \in (0,1), \\ \frac{1}{2}y(\xi) & \xi = 0 \text{ یا } \xi = 1, \\ 0 & \xi \notin [0,1]. \end{cases} \end{aligned}$$

بنا بر این با در نظر گرفتن مقادیر مرزی تابع مجهول داریم:

$$\int_0^1 \varphi(x)Z(x-\xi)dx = [y'(x)Z(x-\xi) - y(x)Z'(x-\xi) + a_1y(x)Z(x-\xi)]_0^1 + \frac{1}{2}y(\xi).$$

برای  $\xi = 0$  می توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)Z(x)dx &= y'(1)Z(1) - y(1)Z'(1) + a_1y(1)Z(1) - y'(0)Z(0) + \\ &\quad y(0)Z'(0) - a_1y(0)Z(0) + \frac{1}{2}y(0). \end{aligned} \quad (10)$$

برای  $\xi = 1$  داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)Z(x-1)dx &= y'(1)Z(0) - y(1)Z'(0) + a_1y(1)Z(0) - y'(0)Z(-1) + \\ &\quad y(0)Z'(-1) - a_1y(0)Z(-1) + \frac{1}{2}y(1) \end{aligned} \quad (11)$$

با توجه به این که

$$Z(x) = e(x)z(x) \quad , \quad Z'(x) = e(x)z'(x)$$

که در آن  $z(x)$  جواب معادله همگن متناظر با است، داریم

$$\begin{aligned} Z(1) &= \frac{1}{2(r_1 - r_2)} [e^{r_1} - e^{r_2}] \quad , \quad Z'(1) = \frac{1}{2(r_1 - r_2)} [r_1 e^{r_1} - r_2 e^{r_2}] \\ Z(-1) &= -\frac{1}{2(r_1 - r_2)} [e^{-r_1} - e^{-r_2}] \quad , \quad Z'(-1) = -\frac{1}{2(r_1 - r_2)} [r_1 e^{-r_1} - r_2 e^{-r_2}] \end{aligned}$$

$$Z(0) = 0 \quad , \quad Z'(0) = 0$$

هرگاه قرار دهیم

$$\lambda_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} [e^{r_1} - e^{r_2}] \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{r_1 - r_2} [e^{-r_1} - e^{-r_2}]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{r_1 - r_2} [r_1 e^{r_1} - r_2 e^{r_2}] \quad , \quad \lambda_4 = \frac{1}{r_1 - r_2} [r_1 e^{-r_1} - r_2 e^{-r_2}]$$

در این صورت

$$Z(1) = \frac{1}{2} \lambda_1 \quad , \quad Z'(1) = \frac{1}{2} \lambda_3 \quad , \quad Z(0) = 0$$

$$Z(-1) = -\frac{1}{2} \lambda_2 \quad , \quad Z'(-1) = -\frac{1}{2} \lambda_4 \quad , \quad Z'(0) = 0$$

بنا بر این از روی روابط (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} (a_1 \lambda_1 - \lambda_3) y(1) + \lambda_1 y'(1) + y(0) = \int_0^1 \varphi(x) z(x) dx, \\ (a_1 \lambda_2 - \lambda_4) y(0) + \lambda_2 y'(0) + y(1) = -\int_0^1 \varphi(x) z(x-1) dx. \end{cases} \quad (12)$$

که شرایط ضروری برای معادله (۱) هستند.

### تشکیل دستگاه جبری

در این مرحله، یک دستگاه جبری با به‌کارگیری شرایط ضروری (۱۲) و شرایط مرزی (۲) تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} (a_1 \lambda_1 - \lambda_3) y(1) + \lambda_1 y'(1) + y(0) = \int_0^1 \varphi(x) z(x) dx, \\ (a_1 \lambda_2 - \lambda_4) y(0) + \lambda_2 y'(0) + y(1) = -\int_0^1 \varphi(x) z(x-1) dx, \\ \alpha_{11} y'(0) + \alpha_{12} y(0) + \beta_{11} y'(1) + \beta_{12} y(1) = 0, \\ \alpha_{21} y'(0) + \alpha_{22} y(0) + \beta_{21} y'(1) + \beta_{22} y(1) = 0, \end{cases}$$

مقادیر مرزی تابع مجهول  $y(0)$ ,  $y(1)$ ,  $y'(0)$ ,  $y'(1)$  از حل دستگاه فوق به‌وسیله دستور کرامر به‌صورت

زیر بدست می‌آیند:

$$y'(0) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \int_0^1 \varphi(x) z(x) dx & 1 & \lambda_1 & a_1 \lambda_1 - \lambda_3 \\ -\int_0^1 \varphi(x) z(x-1) dx & a_1 \lambda_2 - \lambda_4 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$y(0) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx & \lambda_1 & a_1\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx & 0 & 1 \\ \alpha_{11} & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$y'(1) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx & a_1\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2 - \lambda_4 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$y(1) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2 - \lambda_4 & 0 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 & a_1\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2 - \lambda_4 & 0 & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13)$$

فرض می‌کنیم که این دترمینان مخالف صفر است.

هرگاه قرار دهیم

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1^* = a_1\lambda_1 - \lambda_3, \quad \lambda_2^* = a_1\lambda_2 - \lambda_4$$

$$B_1 = \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx, \quad B_2 = -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx$$

در این صورت این روابط را داریم:

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{B_1}{\Delta} [\lambda_2^* A_{34} + A_{23}] - \frac{B_2}{\Delta} [A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1^* A_{23}], \\ y(0) = -\frac{B_1}{\Delta} \lambda_2 A_{34} + \frac{B_2}{\Delta} [-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1^* A_{13}], \\ y'(1) = \frac{B_1}{\Delta} [\lambda_2 A_{24} - \lambda_2^* A_{14} + A_{12}] - \frac{B_2}{\Delta} [-A_{14} + \lambda_1^* A_{12}], \\ y(1) = -\frac{B_1}{\Delta} [\lambda_2 A_{23} - \lambda_2^* A_{13}] + \frac{B_2}{\Delta} [-A_{13} + \lambda_1 A_{12}]. \end{cases} \quad (14)$$

### شرایط مرزی برای معادله الحاقی

اکنون برای به دست آوردن شرایط مرزی معادله الحاقی (۳)، مقادیر مرزی (۱۴) را در شکل دوخطی  $B(y, z)$  قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} B(y, z) = & \frac{1}{\Delta} [(\lambda_2 A_{24} - \lambda_2^* A_{14} + A_{12} - a_1 \lambda_2 A_{23} + a_1 \lambda_2^* A_{13})B_1 + \\ & (A_{14} - \lambda_1^* A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12})B_2]z(1) + \\ & \frac{1}{\Delta} [(\lambda_2 A_{23} - \lambda_2^* A_{13})B_1 + (A_{13} - \lambda_1 A_{12})B_2]z'(1) + \\ & \frac{1}{\Delta} [-(\lambda_2^* A_{34} + A_{23} - a_1 \lambda_2 A_{34})B_1 + \\ & (A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1^* A_{23} + a_1 \lambda_1 A_{14} - a_1 \lambda_1^* A_{13})B_2]z(0) + \\ & \frac{1}{\Delta} [-\lambda_2 A_{34} B_1 + (-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1^* A_{13})B_2]z'(0). \end{aligned}$$

برای این که  $B(y, z) = 0$  کافی است این روابط را داشته باشیم:

$$\begin{cases} (\lambda_2 A_{24} - \lambda_2^* A_{14} + A_{12} - a_1 \lambda_2 A_{23} + a_1 \lambda_2^* A_{13})z(1) + (\lambda_2 A_{23} - \lambda_2^* A_{13})z'(1) - \\ (\lambda_2^* A_{34} + A_{23} - a_1 \lambda_2 A_{34})z(0) - \lambda_2 A_{34} z'(0) = 0, \\ (A_{14} - \lambda_1^* A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12})z(1) + (A_{13} - \lambda_1 A_{12})z'(1) + (-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1^* A_{13})z'(0) + \\ (A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1^* A_{23} + a_1 \lambda_1 A_{14} - a_1 \lambda_1^* A_{13})z(0) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

### نتایج اصلی

با جمع بندی مطالب فوق، قضیه و گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم.

**قضیه ۱.۶:** با در نظر گرفتن معادله الحاقی (۳) و شرایط مرزی الحاقی (۱۵)، مسئله الحاقی مربوط به مسئله

اصلی (۲)-(۱) با (۳) و (۱۵) داده می‌شود.

**گزاره ۱.۶:** مقایسه مسئله اصلی (۲)-(۱) و مسئله الحاقی (۳) و (۱۵) متناظر با آن تحت شرط (۱۳) در این

صورت مسئله اصلی (۲)-(۱) خودالحاق است هرگاه  $a_1 = 0$  و روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = -\lambda_2 A_{34} \quad , \quad \alpha_{12} = -\lambda_2^* A_{34} - A_{23} \quad , \quad \beta_{11} = \lambda_2 A_{23} - \lambda_2^* A_{13} \\ \beta_{12} = \lambda_2 A_{24} - \lambda_2^* A_{14} + A_{12} \quad , \quad \alpha_{21} = -\lambda_1 A_{14} + \lambda_1^* A_{13} \\ \alpha_{22} = A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1^* A_{23} \quad , \quad \beta_{21} = A_{13} - \lambda_1 A_{12} \\ \beta_{22} = A_{14} - \lambda_1^* A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12} \end{aligned}$$

## مسائل حل نشده

۱. مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta u + au_{x_1} + bu_{x_2} + cu = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_j(x_1)u(x_1, \gamma_1(x_1)) + \beta_j(x_1)u(x_1, \gamma_2(x_1)) = \varphi_j(x_1), \quad j = 1, 2, \quad x_1 \in (a, b)$$

که در آن  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (a, b), x_2 \in (\gamma_1(x_1), \gamma_2(x_1))\}$  ناحیه کراندار در  $\mathbb{R}^2$  با مرزی‌های هموار معلوم  $\gamma_1, \gamma_2$  بوده  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2$ ) توابع پیوسته معلوم و  $u$  تابع مجهول مسئله هستند. در صورت لزوم می‌توان روی توابع  $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2$ ) پیوستگی هولدر گذاشت.

آیا می‌توان با ارائه شرایط کافی مسئله را به یک مسئله خودالحاق تبدیل کرد. توجه شود که شرایط ضروری در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت معادلات انتگرالی مرزی نوع دوم فردهلم در می‌آید.

۲. مسئله مقدار مرزی-اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1 \quad x \in [0, 1]$$

تعیین کنید مسئله اسپیکترال حاصل از مساله اصلی خودالحاق است یا نه؟

اگر خودالحاق نباشد، شرایط کافی ارائه شود که مسئله اسپیکترال حاصل خودالحاق باشد.

## منابع

1. Kenneth Hoffman and Ray Kunze, "Linear Algebra", Second Edition, Prentice-Hall (1971).
2. T. Myint, U. Lokenath Debnath, "Partial Differential Equations for Scientists and Engineers", Third Edition, North-Holland (1987).
3. M. A. Naimark, "Linear Differential Operators", Moscow (1965).
4. V. S Vladimirov, "Equations of Mathematical Physics", Mir Publishers, Moscow (1984).
5. A. V. Bitsadze, "Boundary value problems including second order elliptic equations", Science Publisher, Moscow (1966) (Russian).
6. M. Jahanshahi, "Investigation of boundary layers in a singular perturbation problem including a 4<sup>th</sup> order ordinary differential equations", Journal of Sciences, Vol. 12, No. 2 (2001).

7. N. Aliyev, M. Jahanshahi, "Solution of Poisson's equation with global", local and non-local boundary conditions, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 33, No. 2 (2002) 241-247.
8. M. Jahanshahi, N. Aliyev, "Determining of an analytic function on its analytic domain y Cauchy-Remann equation with special kind of boundary conditions", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28, No. 1 (2004) 33-39.
9. N. Aliyev, M. Jahanshahi, "Sufficient conditions for the reduction of a BVP include a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations", Int. J. Math. Educ. Sci. Tech., Taylor and Francis, U. K, Vol. 28, No. 3 (1997) 419-425.
10. M. Jahanshahi, N. Aliyev and S. M. Hosseini, "An analytic numerical method for investigation and solving 3-Dimensional steady -state Navier-Stokes equations 2", International Journal of Differential Equations, Vol. 46, No. 2 (2008).
11. M. Jahanshahi and N. Aliyev, "An analytic method for investigation and solving 2-dimensional steady-state Navier-Stokes equations 1", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33 (2009) 749-763.