تکمیل آزمون نیکویی برازش برای توزیع چولهٔ نرمال بر اساس تابع مولد گشتاور تجربی

محمدمهدی مقامی، نصراله ایران‌پناه*؛ دانشگاه اصفهان، گروه آمار

چکیده

تاکنون روش‌های مختلفی برای آزمون نیکویی برازش توزیع چولهٔ نرمال مطرح شده است. در این مقاله روش مینتانیس [۸] که بر اساس تابع مولد گشتاور تجربی است، بررسی می‌شود. این آزمون به‌طور مجزا برای پارامتر شکل معلوم و مجهول مطرح می‌شود. مینتانیس ادعا کرده است آزمون او از نظر توان با آزمون کلموگروف-اسمیرنف قابل رقابت است. اما این ادعا تنها برای پارامتر شکل معلوم درست است. در این مقاله روشی برای یافتن آمارهٔ آزمون ارائه شده است که علاوه بر زمان کم‌تر، توان آزمون مینتانیس را نیز به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌دهد. در این روش برای یافتن سوپریمم، به‌جای محاسبهٔ تابع روی شبکه، از تابع اپتیمم استفاده می‌شود. مینتانیس برای پارامتر معلوم اندازه آزمون خود را بررسی نکرده است که در این مقاله بررسی شده است.

آمارهٔ آزمون

اگر Z_λ یك متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(z;\lambda)=۲\phi(z)\Phi(\lambda z)$ باشد، Z_λ را یك متغیر تصادفی چولهٔ نرمال استاندارد با پارامتر چولگی λ می‌نامیم (آزالینی [۱]). در این تعریف $\phi(\cdot)$ و $\Phi(\cdot)$ به‌ترتیب توابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد هستند. اگر ترکیب خطی $Y=\mu+\sigma Z_\lambda$ را در نظر بگیریم، می‌گوییم Y دارای توزیع چولهٔ نرمال با پارامترهای $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ و $\sigma\in\mathbb{R}^+$ است و با نماد $Y\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)$ نمایش می‌دهیم.

می‌خواهیم آزمون فرض صفر برای برخی $\mu\in\mathbb{R},\sigma>۰$ $\qquad H_۰:\ Y\sim SN(\mu,\sigma,\lambda_0)$

که در آن λ_0 مقدار ثابت و معلومی از مقادیر λ است، یا در حالت کلی‌تر، فرض صفر برای برخی

$$\tilde{H}_۰:\ Y\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)\qquad \mu\in\mathbb{R},\sigma>۰,\lambda\in\mathbb{R}$$

که در آن λ نامعلوم است را در برابر فرض مقابل دل‌خواه انجام دهیم.

فرض کنید $M(t)=E\left[\exp(tY)\right],\ t\in\mathbb{R}$ تابع مولد گشتاور Y باشد. اگر $Y\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)$ آن‌گاه تابع مولد گشتاور Y با در نظر گرفتن پارامتر $\vartheta=\lambda/\sqrt{1+\lambda^۲}$ به‌صورت

$$M_\vartheta(\mu,\sigma;t)=۲e^{\mu t+\left(\sigma^۲t^۲/۲\right)}\Phi\left(\sigma\vartheta t\right)$$

واژه‌های کلیدی: چولگی، آزمون کلموگروف-اسمیرنف، بوت استرپ پارامتری، شبیه‌سازی مونت کارلو
دریافت ۹۰/۵/۲۵ پذیرش ۹۱/۱۰/۵
***نویسنده مسئول** iranpanah@stat.ui.ac.ir

به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه $M_{\vartheta}(۰,۱;t)=۲e^{t^۲/۲}\Phi(\vartheta t)$ در معادلهٔ دیفرانسیلی

$$M'(t)-tM(t)-\vartheta\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\exp\left[\frac{t^۲}{۲}(1-\vartheta^۲)\right]=۰,\qquad t\in\mathbb{R} \tag{۱}$$

به‌شرط $M(۰)=۱$ صدق می‌کند، آزمون نیکویی برازش را بدین‌روش انجام می‌دهیم:

فرض کنید $Y_1,...,Y_n$ نمونهٔ تصادفی از توزیع چولهٔ نرمال باشد. برای آزمون فرض H_0 تابع مولد گشتاور تجربی

$$\hat{M}_n(t)=\frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n}\exp(t\hat{X}_j) \tag{۲}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $j=۱,۲,...,n$ ، $\hat{X}_j=\left(Y_j-\hat{\mu}_n\right)/\hat{\sigma}_n$ و $(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n)$ برآوردگرهای سازگار (μ,σ) هستند. تحت فرض $H_۰$ برای n های بزرگ $\left\{\hat{X}_j\right\}_{j=۱}^{n}$ تقریباً دارای توزیع $SN(۰,۱;\lambda_۰)$ است، بنا بر این انتظار داریم عبارت

$$D_n(t)=\hat{M}'_n(t)-t\hat{M}_n(t)-\vartheta_۰\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\exp\left[\frac{t^۲}{۲}(1-\vartheta_۰^۲)\right] \tag{۳}$$

نزدیک صفر باشد که درآن $\vartheta_۰=\lambda_۰/\sqrt{۱+\lambda_۰^۲}$ است. بنا بر این برای آزمون فرض $H_۰$ ، از میزان انحراف (۳) از صفر استفاده می‌شود. آزمون فرض $\tilde{H}_۰$ براساس اندازهٔ انحراف

$$\tilde{D}_n(t)=\hat{M}'_n(t)-t\,\hat{M}_n(t)-\tilde{\vartheta}_n\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\exp\left[\frac{t^۲}{۲}(1-\tilde{\vartheta}_n^۲)\right] \tag{٤}$$

از صفر انجام می‌شود، که در آن $\tilde{\vartheta}_n=\tilde{\lambda}_n/\sqrt{۱+\tilde{\lambda}_n^۲}$ و $\tilde{\lambda}_n$ یک برآوردگر سازگار λ است. انتظار داریم در مواقعی که این روش میسر است آزمون ارائه شده از لحاظ کارایی با آزمون‌های بر اساس تابع توزیع تجربی، مانند آزمون کلموگروف-اسمیرنوف قابل رقابت باشد. به‌علاوه، آزمون جدید در مواقعی که آزمون های کلاسیک براساس تابع توزیع تجربی پیچیده‌اند به‌آسانی اجرا می‌شود.

با توجه به آن‌که در آماره‌های آزمون (۳) و (٤)، t مقدار مجهولی است، یک روش برای محاسبهٔ تابع مولد گشتاور تجربی انتخاب توافقی یک بردار t_n (کلارک و همکاران [۲]) و یا یک شبکهٔ متناهی از نقاط t_j (اپیس و همکاران [۳]) است. بنا بر این آماره‌های

$T_{n,a}=\sqrt{n}\sup_{-a\le t\le a}|D_n(t)|$ برای برخی $a>۰$ ، در آزمون $H_۰$

$\tilde{T}_{n,a}=\sqrt{n}\sup_{-a\le t\le a}|\tilde{D}_n(t)|$ برای برخی $a>۰$ ، در آزمون $\tilde{H}_۰$

را به‌کار می‌بریم.

سازگاری آزمون ها

برای آزمون مورد نظر فرض می‌کنیم نه تنها تحت فرض صفر، بلکه تحت هر فرض ثابت در مقابل $H_۰$ داشته باشیم $\left(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n,\hat{\lambda}_n\right)\xrightarrow{P}(\mu_۰,\sigma_۰,\lambda_۰)$ که در آن $(\mu_۰,\sigma_۰,\lambda_۰)$ پارامترهای مجهول جامعه‌اند. به‌عبارت دیگر،

برآوردگرها سازگارند و برای انجام آزمون از برآوردگرهای گشتاوری استفاده می‌کنیم. برای آزمون فرض H_0 با $\lambda=\lambda_0$ معلوم و با فرض این‌که تحت فرض مقابل ثابت $E\left(Y^2\right)<\infty$ ، خواهیم داشت

$$E\left(Y\right)=\mu_0+\sigma_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\vartheta_0 \quad , \quad Var\left(Y\right)=\sigma_0^2\left(1-\frac{2}{\pi}\vartheta_0^2\right) \tag{۵}$$

از حل معادلات (۵) داریم:

$$\mu_0=E(Y)-\sigma_0\sqrt{2/\pi}\,\vartheta_0 \ , \ \sigma_0=\sqrt{\frac{Var(Y)}{1-(2/\pi)\vartheta_0^2}}$$

بنا بر این برآوردگرهای گشتاوری μ_0 و σ_0 به‌صورت

$$\hat{\mu}_n=\bar{Y}_n-\hat{\sigma}_n\sqrt{2/\pi}\,\vartheta_0, \qquad \hat{\sigma}_n=\frac{S_n}{\sqrt{1-(2/\pi)\vartheta_0^2}} \tag{۶}$$

ارائه می‌گردند، که در آن $\bar{Y}_n=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}Y_j$ و $S_n^2=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\bar{Y}_n\right)^2$ به‌ترتیب میانگین و واریانس نمونه هستند. همچنین برای انجام آزمون فرض $\tilde{H}_0$ که در آن λ مجهول است، برای وجود برآوردگرهای گشتاوری باید $E\left(\left|Y^3\right|\right)<\infty$ باشد. سازگاری آزمون کلی $\tilde{T}_{n,a}$ را بررسی می‌کنیم. آزمون $T_{n,a}$ حالت خاصی از $\tilde{T}_{n,a}$ است. چون آزمون مطرح شده برای مقادیر بزرگ $\tilde{T}_{n,a}$ فرض $\tilde{H}_0$ را رد می‌کند، این قضیه ارائه می‌شود (میتتانیس [۸]):

قضیه: آزمون نیکویی برازشی که برای مقادیر بزرگ آماره $\tilde{T}_{n,a}$ فرض $\tilde{H}_0$ را رد کند، سازگار است.

اثبات: برای اثبات سازگاری آزمون بر اساس آمارهٔ $T_{n,a}$ باید نشان دهیم

$$\tilde{T}_{n,a}=\sqrt{n}\sup_{-a\le t\le a}\left|\tilde{D}_n(t)\right|\xrightarrow{P}\infty .$$

اگر $\sup_{-a\le t\le a}\left|\tilde{D}_n(t)\right|\xrightarrow{P}\tilde{\Delta}$ ، $\tilde{\Delta}$ باید مثبت باشد، مگر برای وقتی که

$$\text{برای تمام}\ \tilde{D}_n(t)\xrightarrow{P}0 \ ،\ -a\le t\le a \tag{۷}$$

از طرفی با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned}\hat{M}_n(t)&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(t\hat{X}_j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left[t\left(Y_j-\hat{\mu}_n\right)/\hat{\sigma}_n\right]\\&=\exp(-t\hat{\mu}_n/\hat{\sigma}_n)\times\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(tY_j/\hat{\sigma}_n\right)\\&=\exp(-t\hat{\mu}_n/\hat{\sigma}_n)\times M_n\left(t/\hat{\sigma}_n\right)\end{aligned}$$

بنا بر این

$$\hat{M}_n'(t)=\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\exp(-t\hat{\mu}_n/\hat{\sigma}_n)\times\left(\hat{M}_n'(t/\hat{\sigma}_n)-\hat{\mu}_n M_n\left(t/\hat{\sigma}_n\right)\right)$$

که در آن $M_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(tY_j)$ تابع مولد گشتاور تجربی Y است. بنا بر این با توجه به (٤) و سازگاری یک‌نواخت تابع مولد گشتاور تجربی و مشتق آن روی بازهٔ کران‌دار از اعداد حقیقی [٤] و همچنین سازگاری برآوردهای $\left(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n\right)$ برای پارامترهای مجهول $\left(\mu_0,\sigma_0\right)$، نتیجه می‌گیریم

$$\hat{M}_n(t)=\exp(-t\hat{\mu}_n/\hat{\sigma}_n)\times M_n\left(t/\hat{\sigma}_n\right)\xrightarrow{P}e^{-(\mu_0/\sigma_0)t}M(t/\sigma_0)$$

که در آن $M(t)$ تابع مولد گشتاور Y است. به‌همین ترتیب

$$\hat{M}'_n(t)=\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\exp(-t\hat{\mu}_n/\hat{\sigma}_n)\times\left(\hat{M}'_n(t/\hat{\sigma}_n)-\hat{\mu}_n M_n\left(t/\hat{\sigma}_n\right)\right)\xrightarrow{P}\frac{1}{\sigma_0}e^{-(\mu_0/\sigma_0)t}\left(M'(t/\sigma_0)-\mu_0 M\left(t/\sigma_0\right)\right)$$

در نتیجه

$$\hat{M}'_n(t)-t\hat{M}_n(t)\xrightarrow{P}\frac{1}{\sigma_0}e^{-(\mu_0/\sigma_0)t}\left(M'\left(t/\sigma_0\right)-\left(\mu_0+\sigma_0 t\right)M\left(t/\sigma_0\right)\right) \qquad (٨)$$

اکنون برای متغیر تصادفی X با تابع مولد گشتاور $m(t)=E\left(e^{tX}\right)$ داریم $Y=\mu_0+\sigma_0 X$. بنا بر این $M(t)=e^{\mu_0 t}m(\sigma_0 t)$ نتیجه می‌دهد

$$M(t/\sigma_0)=e^{(\mu_0/\sigma_0)t}m(t) \quad و \quad M'(t/\sigma_0)=e^{(\mu_0/\sigma_0)t}\left(\sigma_0 m'(t)+\mu_0 m(t)\right) \qquad (٩)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (٩) در سمت راست رابطهٔ (٨) داریم:

$$\hat{M}'_n(t)-t\hat{M}_n(t)\xrightarrow{P}m'(t)-t\,m(t) \qquad (١٠)$$

با استفاده از (١٠) چون $\tilde{\vartheta}_n\xrightarrow{P}\vartheta_0$ پس

$$\hat{M}'_n(t)-t\hat{M}_n(t)-\tilde{\vartheta}_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[\frac{t^2}{2}(1-\tilde{\vartheta}_n^2)\right]\xrightarrow{P}m'(t)-t\,m(t)-\vartheta_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[\frac{t^2}{2}(1-\vartheta_0)\right]$$

بنا بر این

$$\tilde{D}_n(t)\xrightarrow{P}\tilde{D}(t) \qquad (١١)$$

که درآن $\tilde{D}(t)=m'(t)-t\,m(t)-\vartheta_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[\frac{t^2}{2}(1-\vartheta_0)\right]$. اگر $\tilde{\Delta}=0$، باید رابطهٔ (٧) برقرار باشد و در نتیجه بنا به (١١) باید $\tilde{D}(t)=0$. از طرفی چون $M_{\vartheta_0}(0,1;t)$ جواب یکتای معادلهٔ (١) است، تنها در صورتی $\tilde{D}(t)=0$ است که $m(t)=M_{\vartheta_0}(0,1;t)$. اکنون با استفاده از یکتایی تابع مولد گشتاور نتیجه می‌گیریم که $X\sim SN(\lambda_0)$. بنا بر این فقط زمانی $\tilde{\Delta}=0$ است که $X\sim SN(0,1;\lambda_0)$ و یا $Y=\mu_0+\sigma_0 X\sim SN(\mu_0,\sigma_0,\lambda_0)$ باشد و در غیراین صورت $\tilde{\Delta}>0$ است. در نتیجه برای هر فرض مقابل با تابع مولد گشتاور متناهی، $\tilde{T}_{n,a}=\sqrt{n}\sup_{-a\le t\le a}\left|\tilde{D}_n(t)\right|\xrightarrow{P}\infty$ و اثبات کامل است.

شبیه‌سازی

در این بخش در بررسی شبیه‌سازی برای آزمون‌ها دو حالت پارامتر شکل معلوم و نامعلوم را در توزیع چولهٔ نرمال در نظر می‌گیریم.

۱. آزمون نیکویی برازش در حالت λ معلوم

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو برای آزمون $T_{n,a}$، آزمون کلموگروف-اسمیرنف (KS) و روش جدید را مقایسه می‌کنیم. در حالت خاص با نمونه‌هایی به‌اندازهٔ $n=20,50$ برای متغیرهای تصادفی استاندارد شده $\hat{X}_j=\left(Y_j-\hat{\mu}_n\right)/\hat{\sigma}_n\,,\,j=۱,۲,...,n$ و با استفاده از برآوردگرهای گشتاوری (٦) آزمون‌ها را به‌کار می‌بریم. در روش مینتانیس برای محاسبهٔ آمارهٔ آزمون $T_{n,a}$ مقدار D_n روی شبکه‌ای از نقاط در فاصلهٔ $[-a,a]$ محاسبه می‌شود. در این شبکه ابتدا فاصلهٔ $[-a,a]$ به فاصله‌هایی به‌طول $a\times ۰.۰۰۱$ تقسیم می‌شود و سپس سوپریمم مورد نظر با ماکسیمم D_n روی شبکه $[-a,a]$ محاسبه می‌گردد. اما در این‌جا روش دیگری را پیشنهاد می‌کنیم و آن استفاده از یک تابع اپتیمم برای یافتن مقدار سوپریمم مورد نظر است. آزمون به روش جدید را با $T_{n,a}^{O}$ نشان می‌دهیم. این روش علاوه بر داشتن زمان کم‌تر در شبیه‌سازی مونت کارلو، دارای دقت و توان بیش‌تری نسبت به‌روش مینتانیس است. برنامه روش مینتانیس و همچنین روش جدید با استفاده از نرم‌افزار R نگاشته شده‌اند.

برای یافتن مقدار بحرانی آزمون مورد نظر به دو روش بر اساس نمونه مشاهده شده $y_۱,...,y_n$، پارامتر شکل $\lambda=\lambda_۰$ و اندازه آزمون α این مراحل را انجام می‌دهیم (روش جدید فقط در مرحلهٔ ۲ با روش مینتانیس متفاوت است):

۱. با استفاده از نمونهٔ $y_۱,...,y_n$ و $\lambda=\lambda_۰$، پارامترهای $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ از رابطهٔ (٦) به‌روش گشتاوری برآورد می‌گردند؛

۲. $D_n(t_j)$ روی شبکه $t_j\in[-a,a]$ با استفاده از رابطهٔ (۳) محاسبه می‌شود؛

۳. $T_{n,a}$ روی شبکه $t_j\in[-a,a]$ محاسبه می‌شود؛

٤. مراحل ۱ الی ۳، m بار تکرار می‌شود؛

٥- مقدار بحرانی $c_n(\alpha)$ با یافتن چندک ۱۰۰α-ام از تابع توزیع تجربی $T_{n,a}$ محاسبه می‌شود.

برآورد توان آزمون برای فرض مقابل، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به‌طور مشابه امکان‌پذیر است. مینتانیس [۸] از m=۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو برای بررسی توان آزمون استفاده کرده است. اما می‌دانیم قبل از توانا بودن یک آزمون، اندازهٔ آن آزمون مهم است. مینتانیس اندازهٔ آزمون را بررسی نکرده است. در ادامه اندازهٔ آزمون را با استفاده از آمارهٔ $T_{n,a}^{O}$ بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم مقدار آمارهٔ $T_{n,a}^{O}$ به پارامترهای مکان و مقیاس وابسته نیست. توجه کنید آماره $T_{n,a}^{O}$ فقط از طریق $\hat{X}_j$ به Y_j به‌ازای $j=۱,۲,...,n$ مربوط است. بنا بر این کافی است نشان دهیم $\hat{X}_j$ به پارامترهای مکان و مقیاس وابسته نیست.

فرض کنید $Y \sim SN(۰,۱;\lambda_0)$ و تبدیل $Y^* = \delta + cY$، $(\delta \in \mathbb{R}, c > ۰)$ را درنظر بگیرید. تحت این تبدیل داریم $\bar{Y}_n^* = \delta + c\bar{Y}_n$ و $S_n^{۲*} = c^۲ S_n^۲$ می‌شود. بنا بر این $\hat{\sigma}_n^* = c\hat{\sigma}_n$ و $\hat{\mu}_n^* = c + \delta\hat{\mu}_n$ به‌دست می‌آیند. در واقع این نشان می‌دهد برآورد گشتاوری σ مکان ناوردا و مقیاس هموردا و برآورد گشتاوری μ هموردای مکان و مقیاس است. با جای‌گذاری در $\hat{X}_j^* = \left(Y_j^* - \hat{\mu}_n^*\right) / \hat{\sigma}_n^*, j = ۱,۲,...,n$ نتیجه می‌گیریم که $\hat{X}_j^* = \hat{X}_j$ می‌شود. بنا بر این آماره $T_{n,a}^O$ تغییری نمی‌کند. در نتیجه برای بررسی اندازهٔ آزمون بدون از دست دادن کلیت مسئله حالت $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ را در نظر می‌گیریم.

جدول ۱ درصد رد فرض صفر را در m=۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقادیر پارامتر چولگی $\lambda_0 = ۰,۰/۵,۱,۲$، اندازهٔ اسمی آزمون $\alpha = ۰/۰۵,۰/۱$ و اندازهٔ نمونه‌های $n = ۲۰,۵۰$ بر اساس آمارهٔ $T_{n,a}^O$ به‌ازای $a = 0.1$ نشان می‌دهد.

جدول ۱. اندازهٔ آزمون با استفاده از آمارهٔ $T_{n,a=۰/۱}^O$

	α=۰/۰۵				α=۰/۱			
	λ.=۰	λ.=۰/۵	λ.=۱	λ.=۲	λ.=۰	λ.=۰/۵	λ.=۱	λ.=۲
n=۲۰	٪۵/۳۹	٪۴/۷۹	٪۵/۲	٪۴/۴۱	٪۱۰/۳۶	٪۱۰/۱۸	٪۱۰/۲۲	٪۹/۵۴
n=۵۰	٪۵/۲۴	٪۴/۷۲	٪۴/۵۵	٪۴/۸۳	٪۱۰/۲۷	٪۹/۹۳	٪۹/۹۶	٪۹/۴۲

جدول ۱ نشان می‌دهد اندازهٔ آزمون به‌اندازهٔ اسمی آزمون α نزدیک است. این نتایج شبیه‌سازی را برای $T_{n,a}^O$ و مقادیر متفاوت دیگر α=۰/۲ ,۰/٤ به‌طور مشابه تکرار شد و به‌نظر می‌رسد آمارهٔ آزمون یا حداقل فراوانی‌های متناظر رد، نسبت به تغییر a پایدارند.

جدول‌های ۱ و ۲ مینتانیس [۸] توان آزمون H_0 را برای $\lambda_0 \in \{۰, ۰/۵, ۱,۲\}$ و $a \in \{۰/۱, ۰/۲, ۰/۴\}$ و همچنین فرض‌های مقابل گوناگون و اندازهٔ نمونهٔ $n \in \{۲۰,۵۰\}$ نشان می‌دهد. برخی از این فرض‌های مقابل بدین‌صورت هستند:

۱. توزیع چوله t، $ST(\lambda, \vartheta)$ (کیم [٦]) به‌صورت

$$ST(\lambda,\vartheta) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^۲}}\left(|Z_۱| / \sigma\right) + \frac{۱}{\sqrt{1+\lambda^۲}}\left(Z_۲ / \sigma\right)$$

که در آن $Z_۱, Z_۲ \overset{i.i.d}{\sim} N(۰,۱)$ و $\sigma^۲ \sim Gamma(\vartheta/۲, ۲/\vartheta)$، به ازای $\vartheta \in \{۲,۵\}$ و $\lambda \in \{۰,۲\}$.

۲. توزیع g توکی $Tu(g)$ به‌صورت

$$Tu(g) = \left(e^{gZ_۱} - ۱\right) / g$$

که در آن $Z_۱ \sim N(۰,۱)$، به ازای $g \in \{۱,۱/۵\}$.

۳. توزیع لاپلاس نامتقارن $AL(\varphi)$ (کاتز و همکاران [۷]) به‌صورت

$$AL(\varphi) = (۱/\sqrt{۲})\left((E_۱/\varphi) - \varphi E_۲\right)$$

که در آن $E_۱, E_۲ \overset{i.i.d}{\sim} Exp(۱)$ ، به ازای $\varphi \in \{0.5,1\}$.

جدول ۲. توان آزمون به دو روش میناتانیس $T_{n,a}$ و جدید $T_{n,a}^{O}$

		$\alpha = ۰/۰۵$		$\alpha = ۰/۱$	
	فرض مقابل	$T_{۲۰,۰/۱}$	$T_{۲۰,۰/۱}^{O}$	$T_{۲۰,۰/۱}$	$T_{۲۰,۰/۱}^{O}$
$\lambda = ۰$	$ST(۰,۲)$	٪۵۱	٪۹۹	٪۵۸	٪۱۰۰
	$ST(۰,۵)$	٪۲۲	٪۲۲	٪۲۹	٪۳۰
	$Tu(۰/۱)$	٪۸	٪۸	٪۱۳	٪۱۳
	$Tu(۱/۵)$	٪۹۶	٪۹۶	٪۹۸	٪۹۸
	$AL(۰/۵)$	٪۲۷	٪۹۹	٪۳۶	٪۱۰۰
	$AL(۱)$	٪۵۹	٪۹۹	٪۷۰	٪۱۰۰
$\lambda = ۲$	$ST(۲,۲)$	٪۵۳	٪۵۸	٪۵۹	٪۶۷
	$ST(۲,۵)$	٪۲۰	٪۲۵	٪۲۷	٪۳۴
	$Tu(۱)$	٪۲۴	٪۶۴	٪۳۱	٪۷۵
	$Tu(۱/۵)$	٪۸۴	٪۱۰۰	٪۸۹	٪۱۰۰
	$AL(۰/۵)$	٪۳۰	٪۱۰۰	٪۳۹	٪۱۰۰
	$AL(۱)$	٪۳۱	٪۱۰۰	٪۴۰	٪۱۰۰

جدول ۲ درصد رد فرض صفر را تحت فرض‌های مقابل ۱ الی ۳ در m=۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقادیر پارامتر چولگی $\lambda = ۰,۲$ ، اندازهٔ اسمی آزمون $\alpha = ۰/۰۵,۰/۱$ و اندازهٔ نمونه $n = ۲۰$ بر اساس آماره‌های $T_{n,a}$ و $T_{n,a}^{O}$ به‌ازای $a = ۰/۱$ نشان می‌دهد. جدول ۲ نشان می‌دهد روش جدید نسبت به‌روش میناتانیس برای یافتن آمارهٔ آزمون به توان بیش‌تری منجر می‌شود.

جدول‌های ۱ و ۲ میناتانیس [۸] به مقایسهٔ توان آزمون $T_{n,a}$ با کلموگروف- اسمیرنوف پرداخته است. با مقایسهٔ نتایج این شبیه‌سازی و شبیه‌سازی میناتانیس [۸] نتیجه می‌گیریم آزمون $T_{n,a}$ رقیب جدی آزمون کلموگروف- اسمیرنف برای نمونه‌های متفاوت است. بنا بر این تواناترین آزمون در این بخش، آزمون جدید $T_{n,a}^{O}$ ارائه شده در این مقاله است.

۲. آزمون نیکویی برازش در حالت λ مجهول

در این حالت نیز مانند حالت λ معلوم از برآوردهای گشتاوری استفاده می‌شود. برای محاسبهٔ برآوردهای گشتاوری می‌توان از روش مستقیم استفاده کرد اما در این بخش از روشی ساده‌تر استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\boldsymbol{y}_n = (y_۱,\ldots,y_n)$ مشاهدات نمونه‌ای تصادفی از توزیع $SN(\mu,\sigma,\lambda)$ با گشتاورهای مرکزی نمونه‌ای برابر $m_۱ = ۰$ ، $m_۲ = s^۲$ و $m_۳ = n^{-۱}\sum_{i=۱}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^۳$ باشند. برآوردهای گشتاوری پارامترها را با $\tilde{\mu}$ ، $\tilde{\sigma}$ و $\tilde{\lambda}$

نمایش می‌دهیم. اگر $\bar{y}$ و s به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه مشاهده شده $y_1,\ldots,y_n$ باشد، آن‌گاه نمونه استاندارد شده $\boldsymbol{y}_{ns}=(y_{s1},\ldots,y_{sn})$ ، که در آن $y_{si}=(y_i-\bar{y})/s;\ i=1,\ldots,n$ مشاهدات نمونه تصادفی از توزیع $SN(\mu_s,\sigma_s,\lambda)$ با پارامترهای $\mu_s=\dfrac{\mu-\bar{y}}{s}$ و $\sigma_s=\dfrac{\sigma}{s}$ هستند. در واقع اگر $Y\sim SN(\mu,\sigma,\lambda)$، آن‌گاه

$$Y_s=\frac{Y-\bar{y}}{s}\sim SN(\mu_s,\sigma_s,\lambda)$$

حال با استفاده ازگشتاورهای اول، دوم و سوم نمونه‌ای توزیع Y_s که آن‌ها را به‌ترتیب با $m_1'=\bar{y}_s=0$ ، $m_2'=s_{y_s}^2=1$ و $m_3'=m_3/s^3$ نشان می‌دهیم، برآوردهای گشتاوری پارامترهای μ_s , σ_s و λ را به‌دست می‌آوریم. اگر $\vartheta=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ ، $c=\{2/(4-\pi)\}^{1/3}$ و $b=\sqrt{2/\pi}$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&E(Y_s)=\mu_s+b\sigma_s\vartheta\equiv m_1=0\Rightarrow\tilde{\vartheta}=\frac{-\tilde{\mu}_s}{b\tilde{\sigma}_s}\\
&E(Y_s^2)=\mu_s^2+2b\mu_s\sigma_s\vartheta+\sigma_s^2\equiv m_2=1\Rightarrow\tilde{\sigma}_s=(1+\tilde{\mu}_s^2)^{1/2}\\
&E(Y_s^3)=-2\mu_s^3+\frac{\mu_s^3}{b^2}\equiv\frac{m_3}{s^3}\Rightarrow\tilde{\mu}_s=\frac{-cm_3^{1/3}}{s}
\end{aligned}\qquad(13)$$

در نتیجه داریم

$$\tilde{\mu}=\bar{y}+s\tilde{\mu}_s,\quad \tilde{\sigma}=s\tilde{\sigma}_s,\quad \tilde{\lambda}=\tilde{\vartheta}/(1-\tilde{\vartheta}^2)$$

چون توزیع آمارهٔ آزمون تحت فرض صفر به پارامتر نامعلوم λ وابسته است، برای یافتن مقدار بحرانی $\tilde{c}(\alpha)$ از روش بوت استرپ پارامتری استفاده می‌کنیم. برای یافتن نقطهٔ بحرانی آزمون‌های مورد نظر بر اساس نمونهٔ مشاهده شده $y_1,\ldots,y_n$ و اندازهٔ آزمون α به‌روش بوت استرپ پارامتری این مراحل را طی می‌کنیم:

1. برآوردهای گشتاوری $\hat{\mu}$ ، $\hat{\sigma}$ و $\hat{\lambda}$ و سپس $\hat{x}_j=(y_j-\hat{\mu})/\hat{\sigma};\ j=1,2,\ldots,n$ را محاسبه می‌کنیم.
2. مقدار آماره آزمون $\tilde{T}_{n,a}$ را براساس $\hat{x}_j$, $\hat{\lambda}$ محاسبه می کنیم؛
3. نمونهٔ بوت استرپ $Y_1^*,\ldots,Y_n^*$ را از توزیع $SN(0,1;\hat{\lambda})$ تولید می کنیم؛
4. برآوردهای بوت استرپ $\hat{\mu}^*$ ، $\hat{\sigma}^*$ و $\hat{\lambda}^*$ و سپس نسخه بوت استرپ $\hat{X}_j^*=(Y_j^*-\hat{\mu}^*)\big/\hat{\sigma}^*$ را براساس نمونه بوت استرپ محاسبه می‌کنیم؛
5. مقدار آمارهٔ آزمون بوت استرپ $\tilde{T}^*\equiv\tilde{T}_{n,a}^*$ را بر اساس $\hat{\lambda}_n^*$ و $\hat{X}_j^*$ محاسبه می‌کنیم؛
6. مراحل ۳ الی ۵ را B=۱۰۰۰ بار تکرار کرده و $\tilde{T}_1^*,\ldots,\tilde{T}_{1000}^*$ را به‌دست می‌آوریم؛
7. مقدار بحرانی $\tilde{c}_n(\alpha)=\tilde{T}_{(950)}^*$ را ارائه می‌کنیم، که در آن $\tilde{T}_{(j)}^*$ j-امین مقدار مرتب شده $\tilde{T}_1^*,\ldots,\tilde{T}_{1000}^*$ است؛
8. فرض صفر در اندازهٔ آزمون α رد می‌گردد اگر $\tilde{T}_{n,a}>\tilde{c}_n(\alpha)$.

اکنون می‌توان آزمون بوت استرپ پارامتری $\tilde{T}_{n,a}$ را برای شبیه‌سازی مونت کارلو و محاسبهٔ اندازهٔ و توان آزمون به‌کار برد. مینتانیس [۸] این آزمون را برای α=۰/۲ و با استفاده از شبیه‌سازی m=۱۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو با اندازهٔ نمونهٔ n=۵۰ انجام داده است. شاید دلیل تعداد نمونه کوچک مونت کارلو، زمان بر بودن برنامهٔ مینتانیس بوده است. در این آزمون نیز می‌توان آمارهٔ آزمون را از تابع اپتیمم به‌دست آورد. این آزمون را با نماد $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ نمایش می‌دهیم. روش جدید به‌دلیل زمان کم‌تر می‌تواند از m=۱۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کند. بنا بر این برای مقایسهٔ دو روش، نتایج خود را برای m=۱۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو گزارش می‌کنیم. جدول ۳ اندازهٔ آزمون‌های $\tilde{T}^{O}_{n,a}$، $\tilde{T}_{n,a}$ و KS را برای $SN(\cdot,\backslash;\lambda)$ با $\lambda \in \{۰/۲۵, ۰/۵, ۰/۷۵, ۱, ۲\}$ نشان می‌دهد.

جدول ۳. اندازهٔ آزمون‌های $\tilde{T}^{O}_{n,a=۰/۲}$، $\tilde{T}_{n,a=۰/۲}$ و KS به ازای n=۵۰ و α=۰/۲

فرض مقابل	λ=۰/۲۵	λ=۰/۵	λ=۰/۷۵	λ=۱	λ=۲
$\tilde{T}^{O}_{n,a}$	٪۲/۲	٪۳/۱	٪۳/۵	٪۴/۶	٪۱/۲
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۶	٪۶	٪۵	٪۴	٪۴
KS	٪۵/۲	٪۶/۴	٪۵/۲	٪۴/۹	٪۶/۷

جدول ۳ نشان می‌دهد آزمون جدید $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ ارائه شده در این مقاله نسبت به آزمون‌های مینتانیس و کلموگروف- اسمیرنف دارای اندازهٔ آزمون بهتری است. برای بررسی توان آزمون‌ها از فرض‌های مقابل مینتانیس [۸] استفاده شده است. مینتانیس [۸] در حالت λ مجهول توان آزمون کلموگروف- اسمیرنف را بررسی نکرده است؛ در حالی که هدف ارائه مقالهٔ او نشان دادن برتری آماره آزمون خود بر این آزمون است.

جدول ٤ توان آزمون‌ها را به‌روش‌های مختلف و فرض‌های مقابل توزیع‌های چوله t، توکی و لاپلاس نامتقارن نشان می‌دهد. جدول ٤ نشان می‌دهد آزمون کلموگروف-اسمیرنف، جدید $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ و $\tilde{T}_{n,a}$به‌ترتیب در اکثر فرض‌های مقابل توان بیش‌تری دارند. حتی در برخی از این موارد، روش جدید محاسبهٔ آمارهٔ آزمون نیز رقیب آزمون کلموگروف-اسمیرنف نیست و این نشان دهندهٔ ضعف آمارهٔ آزمون مینتانیس برای λ مجهول است.

کاربرد برای داده‌های واقعی

در این بخش با مثالی از داده‌های واقعی نتایج روش جدید را با روش مینتانیس مقایسه می‌کنیم. داده‌های جدول‌های۱ و ۲ گوپتا و براون [۵] نمرهٔ بهرهٔ هوشی ۸۷ سفیدپوست و ۵۲ غیرسفیدپوست مرد را در یک شرکت بیمه در سال ۱۹۷۱ نشان می‌دهد. برآوردهای گشتاوری پارامترهای (μ,σ,λ) در جدول ۵ گزارش شده است.

جدول٤. توان آزمون‌های $\tilde{T}^{O}_{n,a}$، $\tilde{T}_{n,a}$ و KS برای n=۵۰ و α=۰/۲

فرض مقابل	ST (۰/۲۵ ,۲)	ST (۰/۵ ,۳)	ST (۰/۷۵ ,۵)	ST (۱,۱۰)	ST (۲,۱۵)
$\tilde{T}^{O}_{n,a}$	٪۷۷	٪۶۹/۸	٪۱۵/۵	٪۸/۹	٪۷/۲
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۴۸	٪۳۳	٪۱۱	٪۷	٪۶
KS	٪۸۹/۸	٪۵۳/۲	٪۲۴/۷	٪۶/۳	٪۸/۵
فرض مقابل	Tu (۰/۲۵)	Tu (۰/۵)	Tu (۱)	Tu (۱/۵)	Tu (۲)
$\tilde{T}^{O}_{n,a}$	٪۹/۲	٪۳۵/۳	٪۹۱/۲	٪۹۶/۹	٪۹۹/۴
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۳	٪۲۵	٪۸۵	٪۹۸	٪۱۰۰
KS	٪۱۶/۵	٪۲۴/۵	٪۹۱	٪۹۸/۹	٪۱۰۰
فرض مقابل	AL(۱)	AL(۱/۲۵)	AL(۱/۵)	AL(۱/۷۵)	AL(۲)
$\tilde{T}^{O}_{n,a}$	٪۳۵/۷	٪۳۰/۲	٪۴۱	٪۵۴/۲	٪۴۳/۳
$\tilde{T}_{n,a}$	٪۹	٪۲۰	٪۲۷	٪۳۴	٪۴۲
KS	٪۶۰	٪۵۳/۶	٪۵۲	٪۵۵/۷	٪۵۰/۴

جدول۵. برآورد پارامترهای توزیع چولهٔ نرمال برای داده‌های بهرهٔ هوشی مردان

پارامتر	μ	σ	λ
سفید پوست	۱۰۵/۶۱	۱۱/۹۸	۱/۱۶
غیرسفید پوست	۹۸/۷۹	۱۱/۳۸	۱/۷۳

در جدول‌های ٦ و ٧ مقادیر آمارهٔ آزمون و مقادیر بحرانی ۰/۰۵ و ۰/۱ داده‌های بهرهٔ هوشی، به‌ترتیب برای دو روش مینتانیس $\tilde{T}_{n,a}$ و جدید این مقاله $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ برای دو گروه مردان سفید و سیاه پوست به‌ازای مقادیر مختلف a محاسبه شده‌اند. با مقایسهٔ مقادیر بحرانی و مقادیر آمارهٔ آزمون در جدول‌های ٦ و ٧ فرض چوله نرمال بودن هیچ‌یک از گروه‌ها در سطوح ۵% و ۱۰% رد نمی‌شود. البته چنان‌که اشاره شد روش جدید محاسبه سریع‌تر از روش مینتانیس است. علاوه بر این، مقایسهٔ جدول‌های ۶ و ۷ نشان می‌دهد که مقادیر آمارهٔ آزمون به‌دو روش تا ۴ رقم اعشار با یک‌دیگر یک‌سان‌اند ولی نقاط بحرانی آن‌ها تفاوت چشم‌گیری دارد. به‌طوری که نقاط بحرانی آمارهٔ آزمون $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ مقادیر به‌مراتب کوچک‌تری نسبت به‌نقاط بحرانی آمارهٔ آزمون $\tilde{T}_{n,a}$ دارد.

جدول ٦. مقادیر بحرانی و آمارهٔ آزمون $\tilde{T}_{n,a}$ برای داده‌های بهرهٔ هوشی

α	سفیدپوست			غیرسفیدپوست		
	۰/۰٥	۰/۱	$\tilde{T}_{n,a}$	۰/۰٥	۰/۱	$\tilde{T}_{n,a}$
α=۰/۲	۰/۰٤۷	۰/۰۳٥	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰٥۲	۰/۰۲۹	۰/۰۰۲۷۸
α=۰/۴	۰/۲۲۹	۰/۱٦۹	۰/۰۲۸۱۰	۰/۱۹٦	۰/۱۲٥	۰/۰۲۹۲۷
α=۰/۶	۰/٦٤۹	۰/٤۸۷	۰/۱۰۳٦۸	۰/٤۷۸	۰/۲۹۲	۰/۱۳۰۰۳
α=۱/۰	۳/۰٤	۲/٤٤	۰/٥۳٥٤۷	۲/۳۲	۱/٦۲	۱/۰٥۰۸۹

جدول ۷. مقادیر بحرانی و آمارهٔ آزمون $\tilde{T}^{O}_{n,a}$ برای داده‌های بهرهٔ هوشی

α	سفید پوست			غیرسفید پوست		
	۰/۰۵	۰/۱	$\tilde{T}^{O}_{n,a}$	۰/۰۵	۰/۱	$\tilde{T}^{O}_{n,a}$
α=۰/۲	۰/۰۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۴۵۲	۰/۰۰۲۷۸
α=۰/۴	۰/۰۵۷	۰/۰۴۸	۰/۰۲۸۰۹	۰/۰۵۱	۰/۰۴۴	۰/۰۲۹۲۶
α=۰/۶	۰/۲۴۵	۰/۱۹۶۵	۰/۱۰۳۶۳	۰/۲۱۲	۰/۱۷۵	۰/۱۲۹۹۷
α=۱/۰	۱/۶۳۵	۱/۴۰۷۵	۰/۵۳۵۴۱	۱/۴۲	۱/۲۵۷	۱/۰۵۰۷

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش محاسبهٔ آمارهٔ آزمون مینتانیس بررسی شد که از نظر توان و زمان اجرای شبیه‌سازی نسبت به‌روش قبلی برتری دارد. این روش بر مبنای استفاده از یک تابع اپتیمم است. همچنین شبیه‌سازی‌ها نشان داد آزمون معرفی شده مینتانیس در مورد پارامتر معلوم، بر آزمون کلموگروف-اسمیرنف برتری دارد؛ اما در مورد پارامتر نامعلوم این ادعا درست نیست.

منابع

1. A. Azzalini, "A class of distributions which includes the normal ones", Scandinavian Journal of Statistics, 12 (1985) 171-178.
2. J. Clark, L. Horvath, M. Lewis, "On the estimation of the spread rate for a biological population" Statistics and Probability Letters, 51 (2001) 225-234.
3. T. W. Epps, K. J. Singleton, L. B. Pulley, "A test of separate families of distributions based on the empirical moment generating function", Biometrika, 69 (1982) 391-399.
4. A. Feuerverger, "On the empirical saddlepoint approximation", Biometrika, 76 (1989) 457-464.
5. R. C. Gupta, N. Brown, "Reliability studies of the skew-normal distribution and its application to a strength-stress model", Communication in Statistics: Theory and Methods, 30 (2001) 2427-2445.
6. H. J. Kim, Binary regression with a class of skewed t link models", Communications in Statistics-Theory and Methods, 31 (2002) 1863-1886.

7. S. Kotz, T. Kozubowski, K. Podgrski, "The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics", Engineering, and Finance, (2001), Birkhauser, Boston.

8. S. G. Meintanis, "A Kolmogorov-Smirnov type test for skew normal distributions based on the empirical moment generating function", Journal of Statistical Planning and Inference, 137 (2007) 2681-2688.